Коммунистическая академия
ассоциация институтов естествознания
секция математики

Ц. 3 руб.
НТ 4

На борьбу ЗА материалистическую диалектику в математике

Государственное Научно-Техническое Издательство
1931

КОММУНИСТИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
АССОЦИАЦИЯ ИНСТИТУТОВ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

НА БОРЬБУ ЗА МАТЕРИАЛИСТИЧЕСКУЮ ДИАЛЕКТИКУ В МАТЕМАТИКЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ
ПО МЕТОДОЛОГИИ, ИСТОРИИ И МЕТОДИКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1931

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ ЛЕНИНГРАД

Редактор Э. Кольман.
Технический редактор А. Полосина.

ОГИЗ № 1093 НТ 4 Зак. № 417. 10 000 экз.

Москва. Уполномоченный Главлита Б 4864.

16-я типография УПП ОГИЗ, Москва, Трехпрудный пер., 9.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
На борьбу за материалистическую диалектику в математике	5
Задачи математиков и физиков материалистов-диалектиков в социалистическом строительстве *(Э. Кольман)*	10
Против научной мистификации в области планирования *(Э. Кольман)*	19
Плановое вредительство и статистическая теория *(М. Смит, В. Хотимский, Б. Ястремский, В. Старовский, А. Боярский)*	25
Вводное слово *(М. Смит)*	25
Вредительство в статистической методологии *(В. Хотимский)*	29
О громанских прогнозах урожая *(Б. Ястремский)*	35
«Соломенные миллиарды» вредителя Вишневского *(В. Старовский)*	38
О теории затухающего темпа развития советского хозяйства *(А. Боярский)*	43
Вредительство в промышленной статистике *(Л. Цыпкин)*	48
Заключительное слово *(М. Смит)*	51
Политика, экономика и математика *(Э. Кольман)*	52
Против буржуазной эклектики в статистике *(В. Хотимский)*	69
К исследованию количественных закономерностей процесса капиталистического производства, взятого в целом *(Э. Кольман)*	72
О системе показателей советской экономики *(Э. Кольман)*	81
Понятие числа в его развитии *(М. Выгодский)*	88
О топологических методах анализа *(Л. Люстерник)*	115
Интеграл в математике и математическом естествознании *(В. Гливенко)*	131
Проблемы истории математики с точки зрения методологии марксизма *(М. Выгодский)*	143
Платон как математик *(М. Выгодский)*	161
«Исследования» Мордухай-Болтовского *(М. Выгодский)*	183
Клейн *(З. Цейтлин)*	192
Современный кризис математики и основные линии ее реконструкции *(Э. Кольман)*	203
Против идеализма в математике *(М. Орлов,* Харьков*)*	216
Идеализм в современной философии математики *(С. Яновская)*	222
К критике учений Больцано и Кантора об актуально бесконечном *(В. Молодший)*	252
Об основных вопросах преподавания математики в средней шк[illegible]	280
По поводу газет[illegible] *(Э. Кольман)*	285
О принципах преподавания анализа бесконечно-малых во втузе *(М. Выгодский)*	290

Библиография

Математика в БСЭ *(С. Яновская)*	305
Материалистическая диалектика в математике *(Э. Кольман)*	315
Теоретические основы арифметики и алгебры Комарова *(М. Выгодский)*	321
Элементы дифференциального и интегрального исчисления. Гренвиль—Лузина *(М. Выгодский)*	336

ГОНОРАР ЗА СТАТЬИ ЭТОГО СБОРНИКА
АВТОРЫ ОТДАЮТ НА ПОСТРОЙКУ
ДИРИЖАБЛЯ «П Р А В Д А»

НА БОРЬБУ ЗА МАТЕРИАЛИСТИЧЕСКУЮ ДИАЛЕКТИКУ В МАТЕМАТИКЕ

Третий год пятилетки, год завершения постройки фундамента социалистической экономики,— год гигантской борьбы. Строительство социализма преодолевает все трудности, продвигается большевистскими темпами вперед, беспощадно сокрушает на своем пути всех, кто пытается помешать ему. Наступление на капиталистические элементы развернуто по всему фронту. В тесной связи с огромными успехами в деле индустриализации Советского союза, переходящего из последних в первые ряды промышленных стран, с совершающимся, имеющим всемирно-историческое значение переворотом в сельском хозяйстве, пролетариат на фронте культурной революции, осуществляя всеобщее политехническое обучение и навсегда уничтожая неграмотность, выращивая кадры своих инженеров, агрономов, врачей, педагогов, исследователей, под руководством партии штурмует самое «небо»—наиболее недоступную твердыню господствующих классов—научную идеологию.

В области социально-экономических наук марксизм-ленинизм одержал блестящие победы. В политической экономии, в истории, в философии после целого века упорных сражений, составляющих нераздельную слагаемую мирового рабочего движения, теперь, на четырнадцатом году диктатуры пролетариата, командные высоты прочно завоеваны рабочим классом, и если и приходится отстаивать их от изворотливых нападений классово-враждебных идеологических учений, если и приходится драться против вредительства всех видов, в том числе и в общественных науках, то это бои с противником, разбитым в основном, а поэтому преисполненным бешенством отчаяния.

Не так обстоит дело в области наук естественных. Хотя пролетарское мировоззрение и здесь перешло в наступление, но оно не продвинулось дальше первого ряда окопов и находится все еще лишь на подступах к самой крепости буржуазной науки. Относящиеся сюда работы Энгельса и Ленина имеют решающее значение: они поставили задачи и предуказали пути, которыми эти задачи должны быть решены естественниками-марксистами. Однако материалистическая диалектика, давшая уже некоторые результаты в исследованиях по истории естествознания, его связи и взаимоотношениях с техникой, экономикой и философией, еще не конкретизировалась как методология исследования в отдельных естественно-научных дисциплинах; от стадии, когда материалистическая диалектика преимущественно является оружием критики, к стадии, когда она перестраивает самое науку, переход здесь еще не совершился.

О завоеваниях материалистической диалектики в области математических наук можно сказать столь же мало отрадного, как относительно продвижения марксизма-ленинизма в области естествознания. У нас нет пока не только материалистическо-диалектической математики, но и более или менее заметных элементов марксистской теоретической работы в математике. Богатейшее наследство Маркса, Энгельса и Ленина, их высказывания как по общим вопросам материалистическо-диалектической методологии, имеющие близкое отношение к математике, так и по истории нашей науки, не собраны, не разработаны и не популяризованы. Большинство из тех немногих статей, что написаны по марксистско-ленинской методологии математики, скудны содержанием и далеко не свободны от формалистического или механистического влияния. Работы Маркса по математике и ее приложениям к экономике даже не опубликованы. Сделаны лишь самые первые шаги для того, чтобы поставить математические науки на службу социалистической практике, чтобы — под руководством математиков-марксистов — добиться перелома в рядах математиков, громадное большинство которых все еще оберегает священную «чистоту» «божественной» математики.

Между тем стихийное движение за реорганизацию математических наук, за их коренную перестройку, за внедрение в них материалистически-диалектического метода все более ширится и крепнет в нашем Советском союзе. Потребность иметь хотя бы основные методологические установки настолько сильна в рядах наших вузовцев и втузовцев, передовых преподавателей, что стихийно рождает попытки диалектических толкований математики, попытки показать, что математика диалектична по своей методологии и т. д. Хотя дальше той ступени, когда математические теоремы служат более или менее удачными иллюстрациями основных законов диалектики, такие попытки не поднимаются, а иногда представляют собой нечто в роде «красной халтуры», все же сам факт появления таких попыток говорит о том, насколько жизненно необходимо взяться наконец за переделку, за реорганизацию математических наук орудием марксистско-ленинской методологии.

Эта необходимость коренной перестройки математических наук приобретает исключительное значение, если рассматривать ее в историческом аспекте, если учесть особенности развития математики именно в России, прежде всего ведущей московской математической школы. Эта школа Цингера, Бугаева, Некрасова поставила математику на службу реакционнейшего «научно-философского миросозерцания», а именно: анализ с его непрерывными функциями как средство борьбы против революционных теорий; аритмологию, утверждающую торжество индивидуальности и каббалистики; теорию вероятностей как теорию беспричинных явлений и особенностей; а все в целом в блестящем соответствии с принципами черносотенной философии Лопатина — православием, самодержавием и народностью [1]. После падения капиталистического строя московская математи-

[1] Н. В. Бугаев. Идеи непрерывности и прерывности, Казань, 1905 г.

ческая школа спокойно продолжала свое дело, развивала свою крепостнически-поповскую философию, только конечно под другой вывеской, которую она извлекла из древнего архимедовского реквизита и водрузила на свой фронтон: Noli turbare circulos meos! («Не расстраивай мои круги!»). Пусть советская общественность не вмешивается в наши математические дела, мы нейтральны, мы вне политики. Так говорили Васильевы, Богомоловы, Флоренские и печатали в советских издательствах свои мистические, махрово-идеалистические математические сочинения; так говорили Егоровы, затаив смертельную ненависть к социалистическому строительству; так мотивировали и те математики, которые уклонились подписать воззвание к заграничным ученым по поводу вредителей.

Под прикрытием нейтральности продолжалась работа на идеализм, и она продолжается и до настоящего дня: «...В последнее время сильно критикуется идея натурального ряда чисел, от единицы до бесконечности, здесь именно является смутным понятие «бесконечность»; повидимому натуральный ряд чисел не представляет собой абсолютно объективного образования. Повидимому он представляет собой функцию головы того математика, который в данном случае говорит о натуральном ряде. Только откровенный идеалист — больше того солипсист — может считать натуральный ряд чисел «функцией головы того математика, который в данном случае говорит о натуральном ряде». Интуиционист Лузин вполне оправдывает похвалы, расточаемые ему Анри Лебегом в предисловии к «Leçons sur les ensembles analytiques», книге, написанной Лузиным в 1930 г. и изданной в коллекции монографий Бореля в Париже: «Он (Лузин) быть может тоже относится с некоторым недоверием к философии, но не боится ее; у него имеются философские мысли, и он их исповедывает. У него математические потребности и философские потребности постоянно объединены, можно даже сказать слиты. Хотя его книга и является математической работой, написанной математиком для математиков, все же ясно, почти на каждой странице, выступает это тесное единство философских и математических идей, что придает сочинению исключительное значение и совершенно особую привлекательность». К какой философии влечет Лебега? «Когда я был студентом, за чашкой кофе мы охотно принимались обсуждать все общие идеи; дискуссия разгоралась и казалось, что ей не будет конца, пока один из нас не восклицал: «Прежде всего, ты-то существуешь ли? Я говорю «ты» ради удобства, но существую лишь я один...». Тогда мы понимали, что надо итти работать, и мы расставались до завтрашнего дня. Когда появился признак Зенона и лжеца, математики поняли, что им надо убираться; однако они не вернулись на завтра, так как кофе не было подано»... (Там же, Prèface, pp. X, XI).

Разве из всего сказанного не ясно одно: крепость идеализма в математике должна быть взята и разрушена до оснований!

Требование реконструкции математики диктуется не менее повелительно конкретными задачами социалистического строительства. Необходимость овладеть наукой и техникой, всем этим тончайшим инструментом из наследства буржуазной культуры, овладеть, т. е.

не просто перенять, но переработать их,—это величайшая проблема, важнейшая слагаемая в переделке миллионов людей, столь четко поставленная Сталиным, обозначает и для математических наук начало новой эпохи, начало своего реконструктивного периода. Только теперь становится понятным, что переработка пролетариатом естественных, технических и математических наук, жизненно необходимая для социалистического строительства, возможна лишь в эпоху реконструкции, когда строительство фундамента социалистической экономики завершается и рождаются новые силы, десятки и сотни тысяч новых пролетарских кадров, которые могут выделить из своей среды сотни и тысячи пролетарских исследователей, творцов, ученых. И только теперь особенно глубоко понятно марксистско-ленинское учение о трех формах классовой борьбы, о борьбе за овладение идеологией, наукой, и слова Ленина о бешеной страсти и возросшей во сто крат ненависти, с которой потерпевший поражение классовый враг снова бросается в бой за возвращение отнятого «рая».

Никогда классовая борьба в науке не велась с такой ожесточенностью, как именно теперь. Никогда потребность в нашей науке, науке, действительно служащей социалистическому строительству, не была так велика, как сегодня. Кто теперь не с нами, кто все еще «нейтрален»,—тот против нас. А быть с нами—значит для ученого: поставить не только себя как общественника, но и свою науку на службу социалистического строительства, реконструировать ее. В математических науках мы еще не имеем ничего похожего на такую программу исследовательских работ, которую относительно физики попытались у нас построить на узловых технических проблемах, а тем более не имеем охватывающего все стороны вопроса пятилетнего плана математической реконструкции. Очевидно, такая программа, такой план должны быть созданы, что это нужно сделать безотлагательно и что это возможно лишь при активном участии всех математических сил, действительно готовых бороться за дело пролетариата.

Настоящий сборник представляет конечно лишь одно из звеньев в цепи мероприятий, необходимых для реконструкции математических наук на основе материалистической диалектики, единства теории с практикой социалистического строительства. Как видно из оглавления, в нем содержится ряд статей по вопросам политики в математических науках, далее большое количество статей по материалистически-диалектической методологии и по истории математики, затем идут критические статьи против идеализма, механицизма и анти-марксизма в математических науках и наконец—по методике преподавания математики. Значительное большинство материалов сборника—это напечатанные в разное время в разных журналах статьи, причем авторы иногда вносили в них некоторые редакционные исправления, а частично и существенные поправки. Что же касается выбора материалов, то составители сборника взяли из всего того, что имелось в их распоряжении, то, что казалось им относительно наиболее ценным, наиболее выдержанным с точки зрения марксизма-ленинизма. «Наиболее» в том смысле, что составители сборника от-

дают себе ясный отчет, что материал, помещенный в сборнике, не может претендовать на безусловную, «стопроцентную» выдержанность, не должен восприниматься читателем как окончательное методологическое слово. Сборник носит таким образом в известной своей части дискуссионный характер; он дает материал на котором должна дальше оттачиваться марксистско-ленинская математическая мысль. Не к «благосклонности» читателя обращается сборник «На борьбу за материалистическую диалектику в математике», а с требованием от него тщательной деловой и беспощадной самокритики, сознательного осмысливания всех положений. Необходимо также отметить, что в сборнике (за исключением статей по применению математики к экономическим наукам) отсутствуют статьи по конкретным приложениям математики и что слабо освещено развитие математических наук в эпоху империализма; по обеим этим крупным темам Секция математики Ассоциации естествознания Комакадемии готовит однако отдельные сборники.

Не претендуя на то, чтобы служить знаменем, чтобы дать законченную готовую платформу, сборник должен помочь всем, кто по-новому хочет осознать старое, должен служить призывом к напряженной работе, к борьбе за материалистическую диалектику в математике и в математических науках.

Э. Кольман

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКОВ И ФИЗИКОВ МАТЕРИАЛИСТОВ-ДИАЛЕКТИКОВ В СОЦИАЛИСТИЧЕСКОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ [1]

Мы, марксисты, исходим из того положения, что развитие науки в основном определяется развитием производительных сил и производственных отношений и, следовательно, что нет науки, созданной для всех времен. Наука принимает отпечаток социального уклада данного момента.

Мы живем в период строительства социализма, в период, когда перестраивается экономика всей нашей страны, отношения людей друг к другу, переделываются и сами люди. Немыслимо, чтобы при этом не перестраивалась и наука. Более того, сама перестройка всего общества на новых, социалистических началах возможна только при условии, что будет создана новая техника, что вырастет новая наука, новая в сравнении с той, которая была при капитализме. Ленин многократно повторял, что коммунизм может быть построен лишь на основе новой техники и новых научных открытий. Этой новой науке, новой технике предстоит таким образом руководящая роль в практической работе по социалистическому строительству.

Социалистическое общество в отличие от всех других обществ, так как лишь с ним начинается сознательная история человечества, построено на основе планового начала; само собой разумеется, что и развитие науки, призванной быть руководителем этого строительства, должно итти таким путем, чтобы сама наука стала плановой. Плановое начало в науке, сознательное ее развитие, должно быть основным признаком, который должен отличать науку при социализме от науки всех других социальных укладов. Поэтому основное направление, которое мы должны иметь в виду при развитии научной работы в настоящий период,— это направление на планирование развития самой науки с точки зрения не только конкретных потребностей социалистического строительства данного момента, но и с точки зрения генерального плана построения нового общества, общества социалистического.

То, что отличало до сих пор науку, а в особенности наши науки — математику и физику,—это ее оторванность от практики, стихийный характер связи между теорией и практикой, связи, выражавшейся

[1] Стенограмма речи на организационном собрании общества физиков и математиков материалистов-диалектиков. 1 марта 1930 г.

в толчках, которые наука время от времени получала от практики. Практика ставила время от времени ту или иную задачу, наука развивалась так, чтобы удовлетворить эту потребность практики, решить эту частную задачу, но постоянной органической связи между теорией и практикой, единства теории и практики конечно не было. Вполне естественно, что после ломки старого строя в рядах руководителей новым строительством сильно негодование против этой оторванности, этой замкнутости, против этой отрешенности науки от всего земного, от всего практического. Все что делается советской властью и партией для того, чтобы сблизить науку с производством, чтобы сблизить все теоретические науки с потребностями социалистической промышленности, транспорта, сельского хозяйства и т. д.—все это крайне необходимо не только для хозяйства, но и для оздоровления самой науки.

Однако из глубокой правильности этой линии еще не следует, что тут невозможны перегибы, которые, разумеется, будут крайне вредны и которые, к сожалению, имеют место. Так, если мы слышали например, что нам не нужны биологические институты, что их следует заменить институтами опытного животноводства и растениеводства, что, мол, самое название б и о л о г и я имеет нехороший привкус, или, если например говорили, что не нужна теоретическая химия, а что химию можно расщепить по отдельным отраслям промышленности и т. д. и т. п., то, разумеется, такие устремления крайне вредны, и если бы они были осуществлены, это было бы крайне вредно для строительства социализма. Ведь не случайно в Америке сближение промышленности с теорией осуществляется в троякой форме: во-первых, оно состоит в том, что промышленность устраивает лаборатории, скажем—физическую или другие научно-исследовательские лаборатории для разрешения практических конкретных задач, которые стоят в данный момент перед техникой; во-вторых, она устраивает лаборатории, ставя перед ними широкие задачи технического изобретательства, создания больших ценных комплексов технических изобретений, не связанных непосредственно с тем или другим определенным техническим заказом; в третьих, и этого не надо забывать, эта связь выражается и в финансировании так называемой «чистой» науки, т. е. такой науки, которая не ставит себе непосредственных задач, относящихся к технике на данном этапе ее развития. В качестве примера можно привести случай, когда американская промышленность финансировала опыты Милликэна, которые конечно непосредственного отношения к развитию техники и к тем техническим проблемам, которые стоят перед американской промышленностью, не имеют. Необходимость этой третьей стороны само собой понятна, но все-таки нужно сказать, что есть довольно широкие круги, в том числе и профессора технических учебных заведений, инженеры и т. д., которые не хотят видеть этой третьей стороны.

Надо помнить, что именно потому, что нам нужно планировать, что нам надо создать науку, которая будет помогать планировать общество, которая сама будет наукой плановой, именно поэтому нам нужно широкое и глубокое развитие научной теории. Нам нужно

добиваться того, чтобы мы перегнали капиталистические страны не только в области техники, не только в области экономики, но и в области самой науки. Нам нужно добиться того, чтобы наука страны, строящей социализм, заняла руководящую роль в мировой науке. Все попытки свести роль науки только к подсобной, технически-вспомогательной, технологическо-исследовательской, какими бы они «левыми» фразами ни прикрывались, по существу являются реакционными.

В чем должно состоять планирование развития математики и физики по потребностям социалистического хозяйства? Это планирование изменения развития науки не может сводиться только к тому, что мы будем приспособлять наши науки к решению отдельных конкретных проблем в той или другой отрасли — в промышленности, транспорте и т. д. И это конечно делать нужно, и, чего греха таить, мы это делаем в самой незначительной степени, чрезвычайно плохо и чрезвычайно мало. Это можно показать хотя бы на таком примере. У нас читаются в университетах курсы прикладной математики. Однако обыкновенно они не имеют при этом ничего общего с самим приложением, не дают сами по себе никаких указаний, никаких путей тем, кто должен применять потом эту математику на практике. «Прикладная математика» оказывается неожиданным образом собранием очень отвлеченных теорий, которые хотя и нужны, но слишком отвлеченны, чтобы их можно было применять на практике.

Но, повторяем еще раз, недостаточно развивать те отрасли математики и физики, которые могут помочь решить те или другие конкретные проблемы. Нам требуется реорганизация науки в целом. Это касается также теоретической физики, но в особенности конечно математики как науки, в которой большой удельный вес занимают умозрительные элементы. Здесь нам потребуется добиться того, чтобы стихийные линии развития, которые преобладают в этих науках, были постепенно вытеснены плановым началом, чтобы методы, которые случайно возникают из обобщения отдельных, оторванных друг от друга проблем, были объединены, чтобы мы добились некоторой унификации методов, чтобы те параллельные ветви, которые имеются в этих науках (математике это еще нужнее, чем физике, которая все-таки сама по существу своему развивается более планово, поскольку на нее материальный мир влияет более непосредственно),— чтобы такие параллельные, устаревшие ответвления и методы были сданы в исторический архив, чтобы они были приобщены к истории математики, а более передовые, более эффективные, имеющиеся наряду с ними, были поставлены на первое место.

Тогда структура этих наук станет более ясной, а поэтому и более доступной широким массам, чем это имеет место теперь (при этом здесь нужно под «массами» понимать не только рабочих, но и инженеров, которые зачастую все позабыли и в своей практической работе совершенно оторвались и от математики и от физики). Тогда создадутся предпосылки того, чтобы физико-математические науки гораздо активнее участвовали в сознательном руководстве всем направлением развития техники.

Какие имеются условия для того, чтобы такая организация наших наук была осуществлена, не является ли все это голословным, только словесным выражением какого-то неосуществимого пожелания, не хотят ли здесь учинить какой-то разгром этих наук, нарушить то традиционное, что в них имеется и что будто бы только одно могло продвигать эти науки вперед? Да, нужно сказать, что известное покушение на «традицию» имеет место, что придется потребовать отказа от кое-каких традиций, которые однако никогда не продвигали развитие этих наук. Эти «традиции»—та методология, которая будто бы движет все эти науки, но которая на деле никогда не способствовала их развитию. Методология формальной логики, как известно, не может продвинуть и не продвигает ни на шаг развитие математики или теоретической физики, физики вообще. И поэтому требование отказа от этой методологии направлено, собственно говоря, меньше всего к самой науке, а больше всего к ее деятелям; оно является посягательством на то мировоззрение, которое сопутствует этим наукам в буржуазном обществе.

Мы считаем, что физико-математические науки можно перестроить только при том условии, если единственно научная методология марксизма-ленинизма, методология диалектического материализма проникнет в самую сердцевину этих наук. Только в том случае, если мы возьмемся за систематический пересмотр всех методологических положений наших наук с точки зрения диалектического материализма, мы сможем вырвать, высвободить эти науки из той оторванности от практики, в которой они находятся, мы сможем добиться того, чтобы они теснейшим образом связались, как это никогда до сих пор не имело места в истории, со всем развитием культуры. Практика социалистического строительства должна явиться как источником, так и конечной целью перестройки науки. Вы знаете, как этот вопль о том, чтобы такие науки, как математика, физика и т. д., теснее связались со всем развитием культуры, как этот вопль на Западе, в Германии например, из года в год повторяется самими буржуазными учеными, как они снова и снова в своих писаниях обращаются к цвету буржуазного общества, к самым образованным его людям, указывая на ту оторванность, которая существует между этими науками и всем содержанием буржуазной культуры. Но изменить это не в их силах, сколько бы они ни фашизировали науку на основе оголтело-откровенного идеализма, ибо это возможно лишь на основе коренного, материалистически-диалектического пересмотра методологических основ этих наук. Это конечно не означает, будто у нас имеется такая методология материалистической диалектики, которая должна быть просто перенесена в эти науки — одинаково в математику, физику, химию. Нет, каждая из этих наук имеет свою специфическую методологию, свои специфические методы, но эти специфические методы должны создаться на основе развития общей методологии диалектического материализма. Те элементы диалектики, которые мы имеем в этих науках, элементы, которые заставляют некоторых заявлять, будто математика, или физика, или химия

собственно сами по себе уже диалектичны, из чего следует, что нечего особенно заботиться о сознательном внедрении в них методов диалектического материализма (а такие высказывания появились в нашей печати),— эти элементы являются конечно только стихийно выросшими, и было бы глубочайшей ошибкой складывать руки, заявляя, что раз эти элементы там имеются, то нам осталось только констатировать их. Нет, именно наша задача — выявить то, что уже имеется, создать из этого единое целое и строить на основе и того, что имеется, и того, что нужно еще внести, нашу науку.

Все высказанные здесь положения могут встретить возражение следующего порядка: «Но ведь все это только декларация. Что сделано для того, чтобы показать, как можно материалистической диалектикой, диалектическим материализмом продвинуть математику и физику хотя бы на один шаг вперед? Ведь люди тысячелетия работали в этих областях, ни о какой материалистической диалектике не знали и знать не хотели, а все-таки наука развивалась и дала блестящие достижения! А вы приходите, не показавши ни одним примером, что действительно можно сделать с этой очень странной методологией, которая все строит на противоречии, в то время как в этих науках все должно быть непротиворечивым. что можно с этой методологией сделать, чтобы не погубить науку, а, наоборот, развить ее гораздо больше, чем до сих пор». Нужно помнить, что материалистическая диалектика, диалектический материализм сами не родились готовыми, не сразу проявили себя во всей полноте. Применение марксизма и ленинизма к практике, к перестройке всей жизни, применение, воплощающееся в строительстве социализма, эта великая проверка сама есть наивысший этап развития материалистической диалектики в области общественных наук.

Диалектический материализм проходит три стадии, которые конечно нельзя мыслить себе механически раздельными и обязательно следующими друг за другом во времени, ибо они взаимно переплетаются и перерастают друг в друга: первая стадия — где он выступает как метод критики, критики всего существовавшего до сих пор; вторая стадия — это метод объяснения на основе этой критики; третья стадия — метод сознательного изменения действительности. В области естественных наук, которые по своей природе гораздо более отдалены от классовой сущности общества, чем это имеет место в общественных науках, только после завоевания власти пролетариатом в нашей стране, только теперь, после долгих лет подготовительной работы, мы начинаем подходить к тому, что диалектический материализм становится уже не только методом критики и методом объяснений, но и начинает делать первые шаги к тому, чтобы стать методом перестройки, переделки науки. Мы имеем, правда, пока только отдельные, разрозненные работы, насчитывающиеся единицами, например в области биологии, имеем лишь первые робкие попытки и в наших науках, о которых у нас сегодня идет речь, но это вполне естественно, это вполне соответствует всему ходу развития.

Момент, который мы теперь переживаем, когда в нашей стране окончательно выкорчевываются корни капитализма,— это тот момент,

когда перестройка всех наук на плановый, социалистический лад на основе методологии марксизма становится необходимой задачей, когда вместе с тем эта задача становится и возможной. Разрешение этой задачи стало возможным потому, что мы теперь уже имеем возможность готовить кадры для решения этой задачи. Теперь у нас вырастают наши силы, у нас начинают создаваться пролетарские научные кадры. Если в области политэкономии, в области истории, в области аграрной, литературной и т. д. мы уже имеем марксистские пролетарские научные кадры, то теперь настал момент завоевать и физику, математику, геологию и т. д. Настал момент, когда мы можем не только толковать, не только обрабатывать результаты, полученные буржуазной наукой, буржуазными учеными в области физики, математики, химии и т. д., но и превратить диалектический материализм в математике и физике в метод исследования, чтобы добывать новые факты, намечать новые методы. Теперь это возможно именно потому, что у нас есть возможность воспитать новые кадры, которые по своему мировоззрению пойдут по этому пути.

Итак, если мы теперь ставим вопрос о методологическом пересмотре этих наук, то мы ставим этот вопрос в следующих плоскостях: о пересмотре самой методологии научного исследования, об изменении самой структуры наук, о выдвижении новых проблем, новых методов, которые могут решить эти проблемы. Мы не можем удовлетвориться в настоящий момент тем, чтобы применение материалистической диалектики к математике, физике и т. д. ограничивалось отысканием в этих науках иллюстраций, подтверждающих верность отдельных законов материалистической диалектики. Этап, когда мы отыскивали в математике и физике иллюстрации верности того или другого диалектического положения, был необходимым этапом в нашем росте. Мы даже и здесь еще очень мало сделали, не собрали и не разработали указания, данные основоположниками диалектического материализма, но кроме того нам нужно взяться за самое исследование, за самую структуру, за самые методы этих наук. Разумеется, идя по этому пути, мы не можем ограничиться лабораторией, не можем удовлетвориться тем, что будем говорить об этом, писать в печати; недостаточно, чтобы об этом говорили с кафедр или чтобы эти вопросы решались в тиши кабинетов работой над той или иной отдельной, изолированной проблемой.

Нет, единственный способ, которым мы добьемся этой реорганизации,— это способ создания достаточно мощных научно-исследовательских кадров, причем таких, которые были бы марксистски воспитаны, которые были бы достаточно закалены в борьбе со всякими разновидностями реакционной философии. Что здесь нам придется проделать громадную борьбу, что здесь нам придется встретиться с огромным сопротивлением,— это достаточно ясно. До сих пор в физико-математических науках, которые по праву считались до самого последнего времени твердыней реакционной философии, в этих науках сопротивление марксизму чрезвычайно велико. Не только на отдельных лекциях, не только в отдельных курсах, но и перед широкой общественностью мы снова и снова слышим, как в той или другой форме, те

или другие деятели этих наук делают явные или замаскированные выпады против диалектического материализма.

Чтобы не задерживаться слишком долго, приведу лишь один пример, взятый из научно-популярного естественно-исторического журнала «Природа», издаваемого Академией наук СССР в Ленинграде. В № 12 за 1929 г. Белов в статье «Принцип причинности в современной физике» пишет следующее: «В микроскопическую картину мира квантовая механика вносит недостоверности не больше, чем это было сделано кинетической теорией газов. Она только заставляет откинуть тот идеал, который ранее мерещился нам в виде лежащего за нашим управляемым лишь вероятностью миром наблюдаемых явлений строго каузального мира объективных, хотя еще непознаваемых процессов». Здесь следовательно проповедуется индетерминизм, отсутствие каузальности. Вся статья написана в духе Ганса Рейхенбаха, в духе Шредингера, имя же Планка хотя и упоминается, но при этом тщательно умалчивается о тех возражениях, притом весьма резких возражениях, которые Планк выдвигает против этой концепции. Это дается в научно-популярном журнале, имеющем массовое распространение, рассчитанном на широкую аудиторию. Распространяться о том, какие выпады против диалектического материализма делают отдельные профессора на своих лекциях, читаемых в высших учебных заведениях, излишне. Сопротивления, на которые мы натыкаемся, очевидны.

Отсюда вывод, что мы можем добиться успеха только, если выйдем из узкого, замкнутого круга цеховщины, в котором вращались до сих пор в особенности наши науки, которые еще больше, чем другие науки, были своего рода святая-святых, были доступны лишь определенному узкому кругу избранных. Нам нужно добиться поэтому, чтобы общество математиков и физиков материалистов-диалектиков не было узким, замкнутым в себе обществом, а по возможности о б щ е с т в о м м а с с о в ы м. Предпосылки для этого у нас налицо. Мы имеем громадное стремление трудящихся как в городе, так и в деревне к овладению техникой, имеем огромные слои, огромные пласты трудящихся, всеми фибрами стремящихся к тому, чтобы проникнуть в тайны изобретения, в тайны машин, электричества, физики вообще, математики и т. д. Тот особый тип, который несомненно вырабатывается среди людей, интересующихся нашими науками, теперь начинает становиться уже не типом одиночек, отдельных, исключительных личностей, «чудаков», а приобретает относительную массовость. Познакомьтесь с сотнями писем рабочих, крестьян, не только молодежи, но и взрослых, писем, которые посылаются в редакции всевозможных научно-популярных журналов, попадают в наши высшие профессиональные, советские и партийные учреждения. В них эта жажда знания выражена исключительно ярко. Это относится не только к технике, но и к химии, физике, математике.

Наша задача построить общество математиков и физиков материалистов-диалектиков так, чтобы в нем нашли себе место не только первоклассные ученые, не только академики и профессора, не только научные работники первого или второго ранга,

не только аспиранты, но чтобы в этом обществе нашел себе место также и всякий рабочий, любитель математики, физики, студенты и любители-самоучки из среды рабочих и крестьян. Общество должно с самого начала взять курс на массовость, на то, чтобы наши втузовцы, и не только втузовцы, но и те, кто готовится во втуз, нашли себе в нем место.

Может конечно возникнуть опасение, не будет ли этим самым стираться научная сторона этого общества, не превратится ли оно из научного общества в «общество любителей». Мне кажется, что это не так. Пора нам отойти от деления на два или три общества, как это имело место до сих пор в Москве, где было одно общество любителей математики, которое держалось на уровне, так сказать, «средней» математики, и рядом—другое общество другого уровня. Мне кажется, от этого средневековья пора наконец математикам и физикам отказаться. Нам нужно добиться массовости нашего общества, добиться того, чтобы оно ставило себе задачей не только изучение математики и физики, не только их развитие и перестройку, но и пропаганду этих знаний, пропаганду математических и физических знаний в широких массах. «Не может быть социализма без развития новой, высокой техники, не может быть знания новой техники без знания математики, физики, химии и т. д.» Этот лозунг должен стать лозунгом общества, с которым оно должно пойти в широкие массы рабочих и крестьян.

Надо остановиться еще на двух сторонах вопроса: во-первых, нужно обратить внимание на то обстоятельство, что одна их этих наук—математика—непосредственно смыкается не только с физикой, но и через статистику, бухгалтерию, балансоведение и т. д. с общественными науками. Мне кажется, что эта сторона вполне естественно должна получить развитие в виде может быть специальной секции общества.

Далее нужно указать еще на следующее важнейшее обстоятельство: когда мы говорим о необходимости развивать теорию, о том, что широкое развитие научной теории является необходимым условием строительства социализма, что нам необходимо широкое развитие научной теории, для того чтобы она слилась в единое целое с практикой социалистического стоительства, то при этом нужно иметь в виду, что развитие самой научной теории кроме непосредственного значения для социалистического строительства имеет огромнейшее значение для нашего мировоззрения—для мировоззрения марксизма-ленинизма. Марксизм-ленинизм не может быть оторван от развития наук. Он является руководящей основой и в то же время надстройкой над результатами всех наук, всех областей человеческого знания. И мы не можем предоставить развитие этих наук,—развитие и математики и физики,—на все время буржуазным ученым в качестве их монополии, чтобы самим только пожинать плоды, только брать у них результаты и делать выводы из них для тех или иных положений материалистической диалектики. Нам самим нужно взяться за эти науки.

И вполне естественно будет, если в нашем обществе на первых порах, пока не сотрутся грани, для одной его части, для тех, кто уже

давно работает именно в области математики и физики, самой кардинальной, самой основной задачей будет изучение марксистской методологии, причем такое изучение, при котором эта методология была бы не чем-то внешним, не «профессиональным багажем», а превратилась бы в их органическое мировоззрение. Для других же товарищей, для тех, кто только еще начинает подходить к науке, основной задачей вместе с тем будет работа в самой науке, самой математике, самой физике. Нужно помнить, что нельзя стать материалистом-диалектиком, работающим в области математики и физики, будучи плохим математиком, плохим физиком. Перед нашими молодыми товарищами, работающими в этой области, будет поэтому стоять важнейшая задача—максимально заниматься самим исследованием, самим изучением этих наук, чтобы здесь не отставать, чтобы не подходить к этим наукам с наскока, понаслышке, чтобы стать действительными специалистами своей области.

Если мы разовьем обе эти стороны и не будем при этом замыкаться в этом здании, а перенесем свою деятельность на предприятия и в вузы, если мы на предприятиях организуем ячейки нашего общества, если мы в вузах будем иметь свои кружки, то не может быть никакого сомнения, что мы достигнем своей цели, и наши науки—математика и физика—будут развиваться нога в ногу со всеми другими науками в нашем Советском союзе под знаком победоносного социалистического строительства.

Э. Кольман

ПРОТИВ «НАУЧНОЙ» МИСТИФИКАЦИИ В ОБЛАСТИ ПЛАНИРОВАНИЯ[1]

Связь между экономикой и математикой существует двусторонняя. Прежде всего развитие математических наук определяется, как и развитие всякой науки, в конечном счете развитием производительных сил, развитием экономики, техники. В порядке самокритики нужно признать, что математиками-марксистами ровнехонько ничего не сделано, чтобы разработать это положение, чтобы дать не только отдельные более или менее удачно подобранные иллюстрации к нему, но чтобы построить марксистскую историю математических наук. А между тем это—важнейшая задача, без решения которой нельзя дальше продвинуть разработку материалистической диалектики. Ленин прямо указывает на «историю отдельных наук» как на одну из «тех областей знания, из коих должна сложиться теория познания и диалектика» [2], прямо завещает: «Продолжение дела... Маркса должно состоять в диалектической обработке истории... науки и техники» [3]. Но быть может все это, хотя и очень важно, относится исключительно к высшим идеологическим надстройкам и никакого непосредственного отношения к политике не имеет? Что это не так, станет очевидным при рассмотрении обратной связи, а именно влияния математики на экономику.

Гигантские успехи, достигнутые астрономией, механикой, физикой благодаря широчайшему применению математики, все большее проникновение математического метода в химию и биологию, увлечение тогда еще молодой буржуазии рационализмом и натурфилософией—все это способствовало попыткам использовать столь плодотворную в естествознании математику и в общественных науках. С самого начала XIX века зарождается математическая школа в политической экономии. Однако на протяжении всего развития капитализма математическая школа не может похвастаться ни достижениями исследования, ни значительным распространением своих идей. Лишь теперь, на последнем этапе монополистического капитализма, вновь заметно оживление математической политэкономии, которая служит, будучи наиболее реакционной из всех буржуазных экономических учений, «научным» прикрытием фашизма.

[1] Напечатана в несколько сокращенном виде в «Правде» от 31/X 1930 г.
[2] XII Ленинский сборник, стр. 345.
[3] IX Ленинский сборник, стр. 139.

Неудивительно, что в Италии, Америке, Германии охотно увлекаются изящными математическими формулами Парето, Кларка, Фишера, Лаунгардта и др., формулами, «доказывающими» «незыблемость» капитализма, «справедливость» распределения и т. д. и т. п. Странно лишь то, что эти модные увлечения, проникая довольно беспрепятственно на нашу советскую почву, не получают здесь достаточного отпора. Мы не станем распространяться на счет писаний господ Кондратьевых и Базаровых, еще недавно протаскивавших на страницах наших солидных журналов в математических теориях капиталистических циклов, в теориях восстановительного процесса конъюнктуры и принципов планирования свои вредительские устремления. Антимарксистский характер этих теорий, направленных на срыв социалистического строительства, разоблачен, так что непосредственного влияния на нашу плановую работу они оказать больше не могут, хотя нужно сделать еще немало, чтобы рассеять тот туман, которым они успели окутать не одну голову. Но много хуже обстоит дело с отдельными математическими увлечениями, в которых некоторые наши планирующие органы на практике уже «догнали» Америку.

Взять к примеру наиболее элементарный, но в то же время основной прием всякой статистики—вычисление средних величин. В Америке за последнее время сильно распространился способ геометрической средней, вытеснивший среднюю арифметическую. Новый метод, правда, не научен и дает заведомо искаженные результаты; зато он тем более любопытен, если его рассмотреть с классовой точки зрения. Прежде всего геометрическая средняя сглаживает острые углы, кризисные зигзаги кривых капиталистического развития несравненно больше, чем это может сделать средняя арифметическая; далее она усложняет все выкладки и формулы, придает им архиученый вид и тем самым старается внушить обывателю уважение к «научности» и «точности» буржуазной экономики; наконец ее применение предполагает более высокую квалификацию, а следовательно и более высокую оплату статистиков. Но совершенно особо нужно отметить одно свойство геометрической средней, имеющее роковое значение при ее применении к советской экономике: так как она всегда меньше средней арифметической [1], то неизбежно дает понижение показателей, замедление темпов!

Для примера сравним цифры валовой продукции оптимального варианта планируемой ВСНХ промышленности на 1932/33 г. в процентах к 1927/28 г., вычисленные методом средней арифметической,

По группе *А*	По группе *Б*	По всей промышленности
331,1	244,0	279,0

[1] Например арифметическая средняя чисел 4 и 16 будет равна половине их суммы, т. е. 10, а их геометрическая средняя равна квадратному корню их произведения, т. е. 8.

с цифрами, вычисленными методом средней геометрической, как это рекомендовал [1] бывший Конъюнктурный институт Наркомфина в период возглавления его Кондратьевым:

По группе А	По группе Б	По всей промышленности
322,0	234,6	366,5

В настоящее время Госплан в отношении индексов натуральной продукции благополучно отказался от геометрической средней, которая однако еще сохранилась в недрах Госплана при вычислении индексов цен и рекомендуется только что вышедшим в Госиздате учебником С. Боброва «Экономическая статистика». Аналогичные, еще более грубые ошибки имеются и в опубликованных в пятилетке индексах производительности труда, рабочей силы и др., причем, как это показал т. Старовский [2], они создают видимость понижения производительности в тяжелой промышленности относительно легкой. Вычислительный метод здесь прямиком превращается в политический фактор. А ведь распропагандированная Базаровым [3] геометрическая средняя прочно укоренилась в нашем планировании: наши плановики и статистики, отбросив «низменные» счеты и арифмометры, забаррикадировались стеной логарифмических таблиц.

Другой пример—это так называемая центрография, свившая себе гнездо под гостеприимными крылышками Института экономических исследований союзного Госплана и Русского географического общества. Эта «наука» восходит еще к Менделееву, который, как известно, был не только гениальным химиком, но вместе с тем и деловым агентом нефтепромышленников и заурядным вульгарным экономистом. Суть современной центрографии, согласно разъяснениям ее отечественных апостолов Мительмана и Святловского [4], состоит в придаче «географической конкретности» статистическим данным, в том, что определяют «центры тяжести» важнейших производительных сил страны, и получаемые таким образом точки наносят на географическую карту. Так получают центр населения, центр скота, центр механической двигательной силы, центр распространения важнейших хлебов и т. д., т. е. «статическую центрограмму», которая якобы дает возможность судить о разрывах в расположении производительных сил (например сырья и топлива и т. п.). Далее, определив эти же центры за различные годы, получают «динамические центрограммы». Из передвижения точек делают такие «выводы», как например, что «центр населения»

[1] «Вопросы конъюнктуры», т. 11, статья Я. Герчука.
[2] «Вестник статистики», № 3—4, 1929 г.
[3] См. например его «Капиталистические циклы и восстановительный процесс хозяйства СССР», Гиз, 1927 г.
[4] Мительман. Вопросы фиксации наблюдений и центрографический метод, «Плановое хозяйство» 1929. Святловский. О центрографическом методе, в «Хрестоматии экономгеографии», вып. 1, изд. Университета Свердлова, 1926 г.

территории нынешнего СССР был в 1858 г. западнее Ртищева, в 1913—около Марксштадта, в 1920—севернее Пензы, а в 1926 снова благополучно вернулся к Марксштадту, чтобы дальше двигаться по прежнему «естественному», не возмущаемому никакой революцией направлению на восток. Не рискуя злоупотреблять терпением читателя, не станем излагать всю кучу нелепостей, нагроможденных центрографами; отметим лишь, что иногда случается, что найденные центры попадают вне пределов рассматриваемых территорий, что используется как научный аргумент необходимости империалистических аннексий,—недаром центрография пользуется за последнее время известной популярностью во Франции и в САСШ. Вся пустота этой лженауки совершенно очевидна. Ее «центры»—это бессодержательные фикции, «географическая конкретность» которых куплена ценой полной потери экономической конкретности. Имея перед собой занесенные на карте «центры, мы не только не в состоянии сделать какой бы то ни было вывод по поводу тех экономических явлений, которые они «представляют», но даже в качестве наглядного изображения они совершенно непригодны, вызывая извращенные представления о действительности. Иначе и быть не может, ибо центрография состоит в грубо механическом перенесении методов механики (статики) твердых тел в экономику, в самом беззастенчивом отождествлении производительных сил с силами механики (и те и другие складываются по правилу параллелограма!), в возведении «теории равновесия» в универсальный, всерешающий принцип, в замещении экономических закономерностей естественным законом. И вот этот, с позволения сказать, «метод», по словам центрографов «призванный продолжить явление вне его конкретной обстановки», обсуждается серьезными людьми, его нам предлагают для построения пятилетки и для изучения истории революции.

Увлечение геометрической средней, центрографией—это характерные (но не единственные) случаи попадания наших экономистов в плен буржуазной науки, выступающей тут и там в математической маскировке. Оно и неудивительно. Ведь преобладающее большинство наших экономистов математически безграмотны, не в состоянии по существу контролировать вычислительные методы специалистов, впадают в священный трепет перед их заколдованными знаками и формулами.

Не следует ли сделать из всего сказанного вывод, что математика вообще неприменима ни к теоретической, ни к практической экономике, и что следует просто-напросто изгнать ее из этой области?

Такой «удобный» и упрощенный взгляд, имеющий немало приверженцев, однако глубоко ошибочен. Польза применения математики к практической экономике доказывается весьма материально хотя бы теми дивидендами, которые получают страховые общества, деятельность которых основывается на широком применении математической теории вероятностей. Что же касается теоретической политэкономии, то в банкротстве математической школы повинна не математика, а те неверные экономические принципы, которые были положены в основу исследования: в политэкономии (так же как и в физике и в любой

другой науке) математика не может заменить метод данной науки, она призвана играть лишь подсобную роль. Блестящее применение математического метода, подчиненного и идущего вслед за социально-экономическим анализом, дано Марксом в ряде глав «Капитала». Жестоко ошибаются те, кто например в схемах воспроизводства видят лишь иллюстрации, или те, кто полагают, что Маркс допускал лишь применение первых четырех правил арифметики. То обстоятельство, что в «Капитале» встречаются только простейшие зависимости величин, только прямые и обратные пропорциональности, связано—на что ведь указывал и сам Маркс—с тем, что все закономерности выведены лишь в первом приближении, отвлекаясь от усложняющих факторов; но Маркс, по свидетельству Энгельса, предполагал дать их дальнейшее развитие. Какое значение придавал при этом Маркс математическому методу как методу исследования, видно из его письма Энгельсу от 31 мая 1873 г., где он пишет:

«...Ты знаешь таблицы, в которых изображены движения цен, нормы процента и т. д. в течение года и т. д. в форме подымающихся и падающих зигзагов. Я несколько раз попытался для анализа кризисов вычислить эти up and downs (подъемы и падения) как нерегулярные кривые и думал (и думаю и сейчас, что это будет возможно при помощи хорошо обработанного материала) из них математически определить основные законы кризисов».

Конечно благодаря несравненно большему, чем в естествознании, богатству содержания и тем самым и отношений экономики применение к ней математики становится чрезвычайно затруднительным, а попытки изобразить всю сложность этих отношений в таких простых формах, как числа, прямо-таки лишены смысла, что, комментируя Гегеля, подчеркивал Ленин [1]. Но отсюда не следует, что надо отбросить математику, а наоборот, что надо ее применение поднять на более высокую ступень, использовать ее новейшие достижения и разрабатывать в ней самой новые методы, отвечающие новым, никогда прежде не ставившимся перед ней задачам. Овладение математическим методом, а не бегство от него—таков вывод, который должны сделать экономисты-марксисты.

Показательно то обстоятельство, что как раз в самом центре буйного процветания некритического американизма и математических мистификаций новые кадры молодых экономистов выращиваются в условиях, закрепляющих математическое невежество наших экономистов. Так студенческая газета Института народного хозяйства им. Плеханова, Планово-экономического и Энергетического институтов «Красный студент» (23/VI 1930 г.) пишет: «Комиссия, составлявшая новый учебный план Планового института, сократила время преподавания математики и математической статистики настолько, что угробила их. Необходимость для плановика математики не подлежит никакому сомнению. В дальнейшем совершенно нетерпимо то положение, когда мы вынуждены за математическим оформлением любого пустяка (индексы производительности, цен, физического объема

[1] IX Ленинский сборник, стр. 83.

продукции и т. д.), не говоря уже о сколько-нибудь сложном математическом исследовании, обращаться главным образом к буржуазным или, в лучшем случае, аполитичным специалистам. Совершенно неверно представление о том, что вся премудрость математического метода достаточно исчерпывается арифметикой и первой частью алгебры. Этого может быть достаточно для мелкого лавочника, но не для планирования народного хозяйства». Совершенно ясно, почему базаровствующие и центрографствующие «специалисты» не заинтересованы в том, чтобы наши советские экономисты научились разбираться в их вычислениях.

Из всего сказанного следует, что необходимо пересмотреть то место, которое в системе подготовки экономистов занимают математические науки. В учебных планах таких экономических институтов, как Красной профессуры, Комакадемии, Народного хозяйства и т. п., математика и математическая статистика из факультативных должны стать обязательными дисциплинами, объем их преподавания должен быть расширен настолько, чтобы кончающие институт экономисты были по меньшей мере в состоянии критически воспринимать те или другие конъюнктурные, стандартные, экстраполяционные и т. п. выкладки. Но этого мало: у нас все еще не имеется научной системы показателей нашего советского хозяйства, нет своей теории размещения, отсутствуют обоснованные методы проектирования, генплан и т. д.—все это проблемы, решить которые экономическая мысль сможет лишь при помощи глубокой математической обработки.

Понятно, что, развивая новые методы, приходя в близкое соприкосновение с марксистско-ленинской политэкономией и философией, математика сама должна будет коренным образом перестроиться: метод материалистической диалектики выведет ее из того состояния кризиса, которое она сегодня переживает, и даст ей новые возможности развития. И если до сих пор враги диалектического материализма видят в математике убежище идеализма и метафизики, то работа марксистов-ленинцев в этой области вскоре покажет, что и этот оплот мракобесия представляет собой лишь видимость формально-логических построений, рассыпающуюся при соприкосновении с исторической и материальной действительностью.

М. Смит

ПЛАНОВОЕ ВРЕДИТЕЛЬСТВО И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Печатаемые ниже статьи *М. Смит* (Вступительное слово), *В. Хотимского* (Вредительство в статистической методологии), *В. Старовского* («Соломенные миллиарды» вредителя Вишневского), *А. Боярского* (О теории затухающего темпа развития советского хозяйства), *Л. Цыпкина* (Вредительство в промышленной статистике и *М. Смит* (заключительное слово) представляют собой извлечения из стенограммы заседания общества марксистов-статистиков (Коммунистической Академии) 12 ноября 1930 г.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО

Сегодняшнее заседание нашего Общества посвящено вопросу о роли статистики в плановом вредительстве, иначе говоря, о том дополнительном орудии, которым была статистика в этом вредительстве.

Как могла статистика принять участие в этом деле, и могла ли она быть вообще орудием в руках планового вредителя? Ни для кого не секрет, что в первый период планирования в составлении планов принимал участие ряд лиц, которые были статистиками по профессии. Трудно анализировать те условия, которые еще так недавно у нас существовали и которые так свежи у нас в памяти и так больно ударили нас по сознанию. Приходится однако прежде всего констатировать как факт, что особенно в первый период планирования статистики сыграли в этом деле немалую роль. Потому ли это, что они привыкли обращаться с количественными категориями, которые являются также и орудием планирования, или почему-либо другому. Думается, что не только поэтому, что это дело представляется несколько иначе.

В эту эпоху теория планирования вообще в первый раз в истории является на свет. Никакой методики планирования не было и не могло быть до тех пор, пока люди в процессе работы там, в Госплане, на ошибках, на трудностях не создадут, не выкуют этой теории планирования. Но ясно, что в теории планирования советского хозяйства должна была играть основную роль марксистская экономическая теория. Это не следует понимать так, что в основу должна была быть положена экономика того периода капитализма, анализ которого дал в свое время Маркс. Нет, в основу должен быть положен марксистский метод анализа экономики, который вполне обязательно применить и к настоящему и к будущему. Однако марксистские кадры либо не были сформированы в то время и организованы, либо не нашли

[1] Напечатано в № 10—11 «Планового хозяйства».

сразу, с первых дней планирования какой-нибудь готовой экономической теории. Нужно сказать, что немарксистские теории экономики играли немалую роль в нашей практике в целом ряде наркоматов и особенно в Конъюнктурном институте, во главе которого стоял Кондратьев. Несомненный факт, что граждане из Конъюнктурного института Наркомфина совершенно откровенно пользовались буржуазной теорией, теорией предельной полезности, о чем один из них имел наглость несколько лет тому назад заявить вот в этом самом зале, что по его мнению эта теория, которая применялась в Конъюнктурном институте для каких-то расчетов, очень полезна для советского хозяйства вообще. Конечно эта теория является для нас абсолютно чуждой. Но эти чуждые теории не всегда решались открыто поднять забрало, не всегда решались действовать открыто. И вот для чуждой экономической теории в первую эпоху планирования старая теория статистики являлась громадным подсобным орудием.

Если войти в существо дела,—а сегодня мы это должны сделать,—мы найдем громадное духовное родство между незыблемыми категориями немарксистской политэкономии и между целым рядом статистических теорий, начавшихся с Кетле и кончившихся Кондратьевым, теорий об устойчивости отношений, якобы являющейся основным законом природы, общества и т. д. Что нам поминать и критиковать мертвого Кетле, который установил вечный устойчивый процент нищеты, преступности, болезней и т. д., который якобы должно как обязательную дань платить человечество природе, зачем нам говорить о теории устойчивости, теории, которую установил Кетле много лет назад, когда живой Кондратьев не так давно в коллегии бывшего ЦСУ совершенно уверенно, чувствуя себя может быть будущим премьер-министром, доказывал, что коэфициент покупок на частном рынке в потреблении широких масс является обязательным и устойчивым. Спор шел о пересмотре системы весов, и Кондратьев и его сторонники настойчиво и основательно доказывали, что пересматривать удельный вес частного рынка нет необходимости, ибо здесь мы имеем дело с устойчивым понятием.

Или возьмем эмпирические закономерности Громана, те самые эмпирические закономерности, которые хотели пресловутую огиву урожайности прошлых лет перенести в будущее как нечто обязательное. Те самые эмпирические закономерности, которые считали недопустимым и невозможным, чтобы аграрная страна, какой мы были в прошлом, стала индустриальной страной, реконструировавшей свою индустрию и свое сельское хозяйство. Разве это не та же старая теория устойчивости в новом выражении, и разве старая теория со всем арсеналом ее аргументов не была здесь великолепнейшим орудием в руках господ вредителей?

Но вы можете спросить: а где была марксистская статистика? Почему она на почву марксистской статистики не перенесла правильной экономической теории? Марксистская статистика тогда только формировала свои первые кадры. На кафедрах статистики наших вузов были только единицы в буквальном смысле этого слова, которые осмеливались выступать от имени марксистской статистики.

Самая комбинация слов—марксизм и статистика—казалась чрезвычайно новой, чрезвычайно смелой, а может быть и ненужной. Неоднократно приходилось слышать не только от многих стариков, но, бывали случаи, и от молодых, что, мол, статистика живет и существует вне марксизма, что это для нее слишком большая роскошь, что тот ряд элементарных истин, которые якобы установила старая теория, ничего зловредного с точки зрения марксизма не представляет. Из Госиздата мне ведь недавно сказали по телефону, когда они звонили в Общество насчет второго издания пресловутой книги Боброва, что эта книга ничего «такого» не содержит.

Этот предрассудок относительно того, что старая теория статистики не содержит ничего «такого»,—предрассудок, как видите, до сих пор живой в Госиздате,—чрезвычайно мешал работе тех немногих одиночек, которые дерзнули из области экономики перенести марксистские принципы в статистику. Дерзнули и с ужасом увидели, как те же основные моменты буржуазной теории, против которых приходилось бороться в области экономики, были перенесены как нечто новое в эту старую теорию статистики.

Поскольку это было так, поскольку кадры формировались чрезвычайно медленно, поскольку теоретической экономией не создана еще теория советской плановой экономики, постольку, само собой разумеется, у этих господ был большой простор. Они из старых методов статистики сделали себе несколько вполне надежных орудий вредительства в планировании, и таковыми были в первую очередь плавные ряды, экстраполяция, эмпирические закономерности, затухающие темпы, вообще все методы формально-количественного подхода к развитию. Все это были их орудия борьбы за перенесение старого в новое.

Но если эмпирические закономерности и устойчивые коэфициенты потребления были просто-напросто попыткой самого грубого и вульгарного способа перенесения жалкого прошлого в то светлое будущее, которое мы строим, то другие категории, как экстраполяция, плавные ряды, затухающие темпы и т. д., пытались исказить самое представление о движении, о развитии, ибо их авторы пытались этим способом предотвратить какое бы то ни было диалектическое развитие, какое бы то ни было появление на сцену новых элементов, новых моментов, качественно преобразующих старую действительность.

Подробно об этом скажут другие товарищи, но позвольте мне все же отметить следующий факт. Тот самый знаменитый из знаменитых, глава вредителей и глава «промышленной партии», проф. Рамзин, о котором вы имели удовольствие читать в газетном сообщении, он тоже занимался экстраполяцией. Он пытался с помощью вульгарнейшего, неприемлемого из неприемлемых статистических методов в своем докладе здесь в Академии, примерно лет 6 назад, предсказать неизбежность топливного голода. Что он сделал? Весьма сверхпростецкую, так сказать, вещь. На основе данных, собранных примерно за 50 лет, начертил такую математическую кривую, при помощи которой он предсказал истощение топливных ресурсов на том основании, что коль скоро до сих пор шло так, то и дальше будет так же. Если

этот отрезок кривой дает некое уравнение, соответствующее затухающему темпу запасов топлива, то следовательно их хватит лишь на столько-то и столько-то лет.

Казалось странным, что человек, считавшийся крупным теплотехником, дает аргументы развития будущего на основе неприемлемого статистического приема. Когда же т. Боярский его кривую расшифровал математически, то оказалось, что даже и экстраполяция эмпирического отрезка кривой, которую он брал, была произведена весьма неточно, ибо при экстраполяции ее можно было получить по крайней мере три направления, из которых одно может расти великолепным геометрическим темпом, другое может затухать мало, а третье—больше. Итак даже математически, даже формально это построение не выдерживает никакой критики. Но было любопытно, что мы, не техники, а всего только статистики, всего только экономисты, спорили с ним не от статистической экстраполяции, а на основе трансформации техники, на той основе, что ведь коэфициент использования топлива в массе современных двигателей, особенно транспортных, совершенно ничтожен, и нельзя его переносить в будущее, считая, что техника ровно ничего не сделает для повышения коэфициента использования топлива, и предопределив тем самым, что в дальнейшем кривая топливоиспользования будет итти на основе старой техники. Я помню, что задала ему вопрос: «Вот вы говорите, что запасов топлива хватит только на 200 лет в мировом масштабе. Но неужели же техника 200 лет назад была хоть сколько-нибудь похожа на современную технику и за следующие 200 лет ничуть не изменится»? Правда, этот вопрос мой был еще не от планового хозяйства и реконструкции, а только лишь от капиталистического развития, не больше, но и тут аргументы проф. Рамзина были совершенно недействительны. Если же итти от современной плановой реконструкции техники, от сознательного революционного преобразования ее в определенном директивном направлении, то от его аргументов формального свойства конечно ничего не остается.

Каюсь, до того момента, как я узнала об аресте Рамзина и его причинах, я никак не могла понять, почему инженер, специалист в теплотехнике, рассуждает о будущем, исходя из старого, при помощи вульгарного, неприемлемого статистического приема, да и тот применяется с элементарными и даже формальными ошибками, а мы, статистики, вынуждены были ему подавать аргументы от теплотехники и технических завоеваний.

Факт этот был бы действительно совершенно непонятен, если бы не события, о которых вы знаете, если бы не совершенно определенная роль Рамзина во всех этих событиях.

Когда мы заглядываем в предисловия к контрольным цифрам первых лет, то нельзя сказать, чтобы в них понимание плана как плана директивы, плана, который должен преобразовать действительность, было бы в достаточной мере четко отделено от понимания плана как предсказания, плана, который новое выводил из старого, такого плана, понимаете ли, который сводил работы плановика к какому-то астрономическому наблюдению над действительностью, без малей-

шей возможности на нее повлиять, без малейшего представления о том, в какую собственно эпоху мы живем, что мы сейчас делаем и в чем состоит мера планового развития.

Если принять во внимание, что старая теория статистики есть вообще теория колебания случайных величин, если принять во внимание, что эта теория колебания случайных величин, зародившаяся в эпоху торгового капитализма, есть великолепнейшее отражение анархического капитализма и его хозяйства, то нет ничего удивительного в том, что статистики, сознательно вредительствуя в планировании, пользовались этим орудием для того, чтобы на первых шагах нашей плановой работы затушевывать, затемнять, сделать неясным положение вещей, внести в работу ряд совершенно неправильных моментов.

Многие из вредителей принимали в самом начале активнейшее участие в построении первых контрольных цифр, и так как мы тогда еще не были готовы к критике их или не стояли достаточно близко к этой критике ни по линии экономики, ни по линии статистики, то поле действия оставалось за ними, и они всячески использовали старую теорию статистики, теорию, выработанную анархическим капитализмом, и его на 100% отражающую, как орудие планирования, вернее как орудие вредительства в планировании.

В. Хотимский

ВРЕДИТЕЛЬСТВО В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕТОДОЛОГИИ

На протяжении ряда лет целая плеяда буржуазных и мелкобуржуазных теоретиков, от Кондратьева и Чаянова до Базарова и Рубина, занималась пропагандой реакционных статистических и экономических теорий. При поддержке некоторых звеньев госаппарата, используя внутрипартийные примиренчество и уклоны от генеральной линии, они пытались создать идеологические предпосылки буржуазной реставрации. От грубого эмпирика Громана до тонкого фальсификатора марксизма Рубина, все они—теоретики буржуазной реставрации, более или менее искусно прячущие в своих построениях ту мысль, что под оболочкой пролетарской диктатуры по сути дела идет воспроизводство капиталистических отношений. Они пытались посильно ускорить этот процесс посредством вредительства.

Отрыв формы стоимости от ее содержания у Рубина подводит теоретическую базу под главную мысль писаний Громана, Базарова и др. о том, что товарно-денежное хозяйство неизбежно ведет к капитализму, что советское хозяйство лишь «случайное уклонение» от капитализма.

По Громану пролетарская революция—лишь временный перерыв капиталистического процесса. «Пределом развития нашего хозяйства «в ближайшие годы»,—писал Громан в 1925 г.,—являются довоенные отношения основных элементов хозяйства, «в которых выражались условия хозяйственного равновесия». Эти условия по Громану

«являются регулятивными нормами в объективном смысле слова и для нашего хозяйственного процесса». Таким образом довоенные «закономерности», обнаруживаемые чисто статистическим путем, превращаются в некий уровень, от которого динамике советского хозяйства дозволено лишь «случайно уклоняться». «Степень их устойчивости,—пишет Громан,—конечно не стопроцентная. Раз открытая правильность не повторится в тождественном выражении в следующие моменты, но она будет близка к ним».

Реакционная теория устойчивости выступает здесь в соединении с не менее реакционной теорией равновесия, как оправдание механического перенесения «эмпирических закономерностей» экономически отсталой капиталистической России на экономику строящей социализм Советской страны. Теперь нетрудно видеть, как «сбылись» пророчества Громана о «ближайших годах» после значительных успехов, достигнутых в социалистической реконструкции промышленности и сельского хозяйства.

Однако в мою задачу не входит анализ теоретико-экономических основ вредительских построений. Я имел в виду уделить главное внимание математико-статистическим методам, игравшим роль тяжелой артиллерии в теоретическом арсенале вредителей.

Было бы неверно отрицать научную законность применения более совершенных математических приемов стастистического анализа, чем обычные элементарные приемы. Слабую математическую подготовку наших статистико-экономических кадров отнюдь нельзя считать добродетелью. Ликвидация их математической неграмотности несомненно принесла бы пользу, повысив эффект практической и теоретической работы. Боязнь математики у экономистов-марксистов нередко связана с незнанием математики. Жили отцы и деды без математики—проживем и мы.

Но есть другая очень важная причина вполне законного недоверия к математике. Буржуазная экономическая наука широко использует математическую трактовку для придания видимости доброкачественной науки своим лжетеориям. Она полагает, что чисто математическими манипуляциями, без конкретного анализа изучаемых явлений, без теоретически правильного осмысливания диалектики качества можно проникнуть в «сущность». Такая фетишизация математики получила правильную оценку еще у Гегеля. В противоположность Канту, провозглашавшему, что «всякая наука лишь постольку наука, поскольку в ней есть математика», Гегель остроумно высмеивает «кичливые» претензии математики. И при всем этом правильно указывает, что математика неспособна схватить «качественное имманентное движение, самодвижение», потому что «рассматривает только величину, несущественное различие» («Феноменология духа»).

Каким бы сложным и тонким математическим аппаратом ни пользовался экономист при изучении конъюнктуры капиталистического хозяйства, он неизбежно придет к грубо ошибочным, либо практически бесплодным выводам, если не будет исходить из марксистской теории воспроизводства и кризисов. Он сделается жертвой математи-

ческого формализма, если оторвет количественный анализ от качественного.

В тесной связи с математическим формализмом находится концепция эволюционизма, рассматривающая развитие как плавное количественное изменение. Эта концепция является органически составной частью буржуазной и ревизионистской методологии. Родоначальниками эволюционизма являются творцы классического математического анализа. В школе Лейбница учили, что природа не делает скачков. Именно там возникла концепция развития, как увеличения и уменьшения, как плавного процесса количественных изменений (диференцируемые функции). По Ленину же существуют две основные концепции развития: «развитие, как уменьшение и увеличение, как повторение и развитие, как единство противоположностей (раздвоение единого на взаимоисключающие противоположности и взаимоотношение между ними). Первая концепция мертва, бедна, суха. Вторая жизненна. Только вторая дает ключ к «самодвижению» всего сущего; только она дает ключ к «скачкам», к «перерыву постепенности», к «превращению в противоположность», к «уничтожению старого и возникновению нового» (XII Ленинский сборник). Таким образом концепция эволюционизма апологетична по существу. Она не выводит за рамки старого качества и неспособна вскрыть механизм его разложения и возникновения нового качества. Она стирает качественные различия, подменяя скачкообразное развитие плавным и постепенным через бесконечно-малые изменения.

Из математико-статистических методов, которыми пользовались вредители, заслуживают особенного внимания методы анализа конъюнктуры, заимствованные у известной гарвардской школы. Не потому, что эти методы представляют научную ценность, а именно потому, что они такой ценности не представляют, что они побивают рекорд эмпиризма и буржуазного скудоумия, и, несмотря на все это, рабски копировались у нас и восхвалялись как особенно ценное орудие статистического анализа так называемых «временных рядов». Как известно, гарвардская школа так же, как и Гарвардский университет в целом, пользуется особым покровительством американских банков. Гарвардская школа занимается предсказаниями экономической погоды в Соединенных штатах. Она обслуживает магнатов финансового капитала, пытаясь помочь им на основе предсказаний в критический момент использовать поворот конъюнктуры в своих интересах, посредством банковских, биржевых и прочих операций. С этой целью гарвардцы исследуют три группы экономических кривых: фондов, цен, учетного процента.

Основной порок этих исследований заключается в их чисто эмпирическом характере. Отсутствует самое существенное—знание истинных причин циклообразности конъюнктуры, коренящихся в антагонистической структуре капиталистического хозяйства. Поэтому, несмотря на огромную вычислительную работу, проделанную гарвардцами, они скользят по поверхности экономических процессов и занимаются практически бесплодным, случайным сопоставлением изменяющихся признаков. Еще совсем недавно гарвардская школа

претендовала на предотвращение экономических кризисов в Соединенных штатах. Современный мировой кризис, особенно больно ударивший по Соединенным штатам, показывает, сколь основательны были гарвардские прогнозы и претензии.

Для выделения чисто циклических колебаний, которые особенно беспокоят буржуазию, элиминируется уровень. Уровень—это прямая, либо парабола некоего порядка выше единицы. Но ведь можно выбрать бесчисленное множество линий. Почему в данном случае выбирается прямая? На это гарвардцы отвечают, что прямая выбирается потому, что «рост производства пропорционален росту населения». «Глубина» такого экономически-теоретического обоснования не требует, по-моему, никаких комментариев. Затем исключаются «сезонные» колебания, повторяющиеся из года в год, и наконец остаются невыделенными «случайные» или «иррегулярные», порожденные «случайными» факторами: войнами, стачками, революциями и стихийными бедствиями—землетрясениями и т. п. Таким образом войны и революции рассматриваются как случайные факторы и приравниваются к таким явлениям, как... землетрясение. Казалось бы этого одного уже достаточно, чтобы отвергнуть гарвардские методы как совершенно ненаучные, а не пытаться переносить их в наши условия.

Но и все расчленение конъюнктурной кривой на отдельные слагаемые в корне неверно. Нельзя механически отделить поступательное движение капиталистического хозяйства от циклической формы, в которой это движение неизбежно проявляется. Форма обусловлена содержанием—расширенным воспроизводством антагонизмов и диспропорций капиталистического хозяйства.

Буржуазные конъюнктуристы и их советские эпигоны делают целый ряд других грубых ошибок. Они смешивают принципиально различные экономические типы (промышленный капитализм и империализм, империализм и переходный период). Они подменяют скачкообразное и неравномерное развитие капитализма равномерно-эволюционным и т. д.

Лишь теоретически верное познание экономических законов капитализма может действительно обеспечить правильную математическую трактовку конъюнктуры. Иначе исследователь конъюнктуры обречен на безнадежную путаницу в «дурной бесконечности» эмпирических единичностей (цифр, показателей и т. п.).

Однако и после того, как вредители перемещены туда, где они должны были давно находиться, у нас появляются еще книги, в которых пропагандируются методы американских конъюнктуристов, причем пытаются обосновать их ссылками на Ленина и Маркса.

В своей книге «Экономическая статистика» Бобров пытается использовать авторитет Ленина для защиты теории устойчивости. С этой целью он цитирует известную ленинскую работу «К вопросу о диалектике» и пропускает именно ту часть цитаты, которая бьет

как раз по теории устойчивости и пресловутым «эмпирическим закономерностям», открытым Персонсами и Громанами (Громан: «закон» соотношения товарных масс).

У Ленина:

Единство (совпадение, тождество, равнодействие) противоположностей условно, временно, преходяще, релятивно. Борьба взаимоисключающих противоположностей абсолютна, как абсолютно развитие, движение... Для объективной диалектики в релятивном есть абсолютное.

У Боброва:

По вопросу об устойчивости соотносительностей у Ленина: «Единство (совпадение, тождество, равнодействие) противоположностей условно, временно, преходяще, релятивно». Однако «для объективной диалектики в релятивном есть абсолютное».

Бобров пропускает мысль Ленина об о б с о л ю т н о с т и р а з в и т и я ч е р е з б о р ь б у п р о т и в о п о л о ж н о с т е й, направленную против всяких фетишей равновесия и устойчивости, и комбинирует так остальное, что у неискушенного читателя получится впечатление подчеркивания Лениным какого-то абсолютно-статического момента.

У Боброва можно найти и другие «перлы», что например можно понять из следующего определения конъюнктуры:

«...сочетание народнохозяйственных явлений, которое: 1) является исчерпывающим для данного момента результатом (?) ранее проявившихся в той или иной мере сложившихся хозяйственных явлений, 2) является о б щ е с т в е н н о - н е о б х о д и м ы м с у б с т р а т о м н а и б о л е е в а ж н ы х в д а н н ы й м о м е н т я в л е н и й в и х ц е л о к у п н о с т и (?!), 3) является завершенным (!), исходным (!) пунктом для дальнейшего развития народнохозяйственных явлений. Эта целокупность явлений является необходимо обусловленной и абсолютно неизбежной» (стр. 497).

Неужели Бобров воображает, что можно сойти за марксиста, твердя и кстати и некстати все эти—«общественно-необходимый», «субстрат», «необходимо-обусловленный», «целокупность» и т. д.

В определении ряда других понятий тоже какая-то причудливая смесь кусочков марксизма и американо-вредительских «теорий».

Например на стр. 62 с л у ч а й н о е определяется как явление, «причина которого неизвестна и не может быть точно установлена», т. е. дано обычное метафизическое определение случайного. А на стр. 499, позабыв очевидно о том, что писал на стр. 64, Бобров списывает гегелевское определение случайного.

Основной порок математико-статистических построений вредителей—математический формализм, помноженный на крайнюю примитивность математического аппарата, на незаконность его применения не только с точки зрения теоретической экономии, но и с математической точки зрения. Трактовка динамических рядов, развивающихся во времени на основе определенных закономерностей капиталистического хозяйства, как распределения случайной переменной,

в корне ошибочна. Смутное сознание этого факта существует и у гарвардцев (Персон) и у вредителей. Они вынуждены признавать на каждом шагу, что корреляция «временных рядов» собственно не корреляция, что это всего-навсего «конкомитация», не измеряющая связи, а лишь описывающая (?) ее извне. Нетрудно сообразить, что категория «описания» заимствована из сокровищницы махизма. В этом вопросе о корреляции динамических рядов всего больше ошибок и путаницы. В действительности же коррелирование динамических рядов, например коррелирование кривых Гарвардского барометра, сводится к более или менее замаскированным приемам исследования свойств тригонометрических функций. Замалчиваемый или открыто отвергаемый периодизм экономических кривых (конъюнктуры) абстрагируется от всего остального, отрывается от качественной связи, от специфических закономерностей капитализма и в искаженном виде приводит к неверным «эмпирическим закономерностям», на основе которых предсказывают и... садятся в лужу. В самом деле кольцеобразная регрессия не что иное как окружность, выступающая в некрасивом наряде ломаной. И если в результате большой вычислительной работы вы приходите к выводу, что сумма квадратов синуса и косинуса равна единице, нельзя не усомниться в эффективности всего предприятия.

Необходимо помнить, что задача математика состоит в измерении количественной стороны закономерностей, раскрытых специфическим анализом данной дисциплины (теоретической экономии и т. п.). Качественный анализ служит основной предпосылкой количественного анализа: диалектика качества подводит вплотную к простым и однородным элементам, и лишь тогда в научном исследовании возникает потребность в математической трактовке. Никакая корреляция не вскроет причин циклообразности капиталистической конъюнктуры, если с самого начала теоретически неверно осмыслены закономерности капитализма. Никакая математика ничего не даст для познания закономерностей переходного периода, если нет марксистски правильного понимания экономических явлений с их качественной стороны.

Но с другой стороны, нельзя больше терпеть невероятную неграмотность наших экономистов и обществоведов в области математики. У многих экономистов и философов отсутствует твердое знание арифметики. И как можно при таком математическом вооружении не оказаться жертвой математического очковтирательства вредителей! Социалистическая реконструкция хозяйства и культурная революция с особой остротой выдвигают требования быстрейшей ликвидации этого прорыва. Несмотря на значительный рост наших марксистских кадров и большие достижения в их работе, состояние их математического образования характеризуется резким несоответствием задачам и темпам социалистического строительства. Нужно наладить массовую подготовку таких экономистов, которые, будучи хорошими марксистами-ленинцами, знали бы математику и не испытывали бы головокружения от самой простой алгебраической формулы, а также математиков с марксистско-ленинским образованием.

Б. Ястремский

О ГРОМАНСКИХ ПРОГНОЗАХ УРОЖАЯ

Я хочу рассказать об использовании Громаном одного из вариантов теории устойчивости статистических рядов, той теории, о которой уже упоминалось. Расскажу об одном «теоретическом» выступлении Громана и о борьбе против его очковтирательской теории, которую привелось вести мне вместе с т. Смит и т. Старовским.

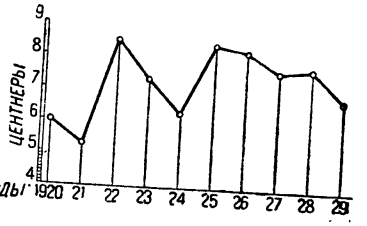
Речь идет о жгучем для нас всех вопросе—о прогнозе урожайности. Покажу, какой метод придумал Громан для того, чтобы предсказывать урожай. Метод его чрезвычайно прост. Для людей неискушенных он кажется каким-то откровением; знающим же дело сразу бросается в глаза явная беспринципность построения Громана.

Следует отметить одну странность. В среде группировавшихся вокруг Громана специалистов выводы его были приняты как некое открытие. Среди этих специалистов были и такие, кто хорошо понимал теорию математической статистики. И вот с их стороны не было дано ни малейшего отпора. И надо было выступить Громану в иной обстановке, в ином окружении (я говорю о выступлении Громана в Госплане в январе 1929 г. и затем в коллегии ЦСУ в мае того же года)[1], чтобы его теория получила надлежащее освещение.

Суть метода Громана может быть пояснена на следующем примере.

Имеются за десятилетие 1920—1929 гг. показатели урожайности зерновых культур по СССР—цифры беру из доклада Громана, за исключением урожая 1929 г.

Показатели урожайности зерновых культур по СССР за 1920—1929 гг.



Черт 1.

Показатели урожайности, как видите, из года в год изменяются скачкообразно, прыгая то вверх, то вниз. Известный статистик-математик В. М. Обухов установил, что наблюдавшиеся до настоящего времени скачкообразные изменения урожаев почти целиком обусловливаются

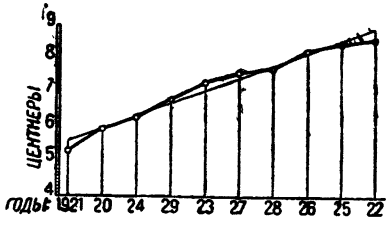
Годы	Центнеров с 1 *га*	Годы	Центнеров с 1 *га*
1920	6,0	1925	8,4
1921	5,3	1926	8,2
1922	8,5	1927	7,6
1923	7,3	1928	7,7
1924	6,3	1929	6,8

[1] Протокол заседания коллегии ЦСУ 22/V 1930 г. опубликован полностью в журнале «Вестник статистики» № 2 за 1929 г.

воздействием метеорологических факторов—осадков и температуры в первую голову.

Наше сельское хозяйство, как известно, развивалось в прошлом, можно сказать, стихийно. И резким скачкам урожайности почти не противостояли или по крайней мере слишком слабо противостояли агротехнические мероприятия. В таких условиях полновластно царила стихия. Высота урожая зависела от случая: будет дождь во-время—жди урожая, пришла засуха—клади зубы на полку...

Показатели урожайности, расположенные по «огиве».



Черт. 2.

Так вот в этой игре случая Громан усмотрел следующего рода закономерность.

Расположите урожайные данные в ряд таким образом, чтобы первым членом ряда оказывался наименьший урожай (1921 г.), вторым—следующий по высоте (1920 г.) и т. д. Тогда вы получите такую последовательность цифр:

Центнеров с 1 *га*	Урожаи	Центнеров с 1 *га*	Урожаи
5,3	1921 г.	7,6	1927 г.
6,0	1920 »	7,7	1928 »
6,3	1924 »	8,2	1926 »
6,8	1929 »	8,4	1925 »
7,3	1928 »	8,5	1922 »

Из диаграммы 2 видно, что наши цифры образуют монотонную последовательность, хорошо знакомую статистикам-математикам. Получающаяся линия называется огивой. Эта огива практически близка к прямой линии. Только на краях она должна давать загибы: налево—загиб вниз, а направо—загиб вверх. В рассматриваемых данных эти загибы отсутствуют.

Проделав описанную только что операцию над целым рядом урожайных данных, не только русских, Громан был поражен получившейся везде правильностью огив. И, поразившись, объявил обнаруженное им свойство «законом симметрии и законом компенсации».

На базе этого «закона» у Громана возникла следующая цепь умозаключений. Существует «закон»: десять смежных урожаев должны укладываться в прямолинейную огиву. Пусть из этого десятка нам известны девять урожаев, а десятый пока неизвестен. Тогда в огиве должен образоваться прорыв, порожденный нехваткой одного звена в цепи линейной последовательности урожаев.

Пусть например даны урожаи за 9 лет, с 1920 по 1928 г., а урожай 1929 г. остается пока неизвестным. (Когда Громан докладывал о своем открытии—январь 1929 г.,—то именно так и было). В таком

случае на огиве не хватит звена в средней части ее. Следовательно надо было ждать урожая около 7 *ц* на гектар.

Так оно в действительности и оказалось. Предсказание почти сбылось.

Этот успех чрезвычайно подкрепил уверенность Громана в незыблемости установленного им «закона». И он дал прогноз на 1930 г. Его прогноз сулил неурожай. Здесь Громан исходил из данных 1921—1929 гг., в которых имелся только один резко выраженный неурожай 1921 г. В огиве не хватало еще одного плохого года. Вот это недостающее звено и должно было охарактеризовать плохую зерновую продукцию 1930 г.

Замечу в скобках, что в показаниях вредителя Рамзина отмечаются надежды интервентов на неурожай именно в 1930 г.

Все знают, что нынешний 1930 г. оказался не только не плохим, но наоборот очень хорошим. На этот раз Громан здорово ошибся. Ошиблись в расчетах и другие вредители и их хозяева.

В построении Громана имеются две ошибки.

Первая ошибка заключается в недоучете Громаном действенности проводимой теперь революции в сельскохозяйственном производстве. Громан недоучел, да и не желал учесть, эффект интенсификации земледелия. Он, как и все вредители, отворачивался с презрительным скептицизмом и от массовой зяблевой вспашки, и от расширенного применения удобрений, и от введения механизации полевых работ...

В ответ на упреки тт. Смит, Старовского, Дубровского и др. Громан отвечал, что им приняты в расчет агро-технические улучшения: в виде уступки он повысил выведенную им цифру на 3%...

По самым скромным подсчетам проводимые теперь мероприятия должны дать гораздо более резкое повышение урожайности. И вы можете легко понять, что достаточно поднятия урожайности на 10%, чтобы все построение Громана лопнуло как мыльный пузырь. Ибо громановская огива опирается на закон компенсации в пределах целого десятилетия. Так что предшествующие девять лет должны, так сказать, предопределить десятый год. Закон компенсации требует существования твердо установленной неизменной огивы, не допускающей никаких скачков урожайности.

Идея Громана—это рецидив отвергнутой статистиками-марксистами насквозь буржуазной теории устойчивости статистических рядов.

Вторая ошибка Громана коренится в глубоком непонимании им действия закона больших чисел. Громан как-будто и не подозревает, что всякий случайный ряд дает по внешности такой же самый эффект, как и его урожайные ряды. В спорах с ним я дважды показывал ему огивы, являвшиеся в результате игры слепого случая при извлечении шаров из урны. Мои огивы были очень похожи на громановские... Но аргументация эта так и не дошла до сознания моего оппонента. Думается однако и не могла дойти, ибо Громан—типичный представитель старой школы ползучего эмпиризма, осужденного скользить по поверхности явлений, осужденного, как говорил Маркс, пресмыкаться перед видимостью.

Вот пример очковтирательского направления в нашей статистике. На борьбу с ним мы тратили много энергии. И должен с сожалением констатировать, что в спорах и с Громаном и с другими и я и мои товарищи полагали, что перед нами лишь идеологические враги. Казалось, что речь идет только о методологических установках. Однако дальнейшее развитие событий показало, что дело было не только в методологии. И это показали не мы, это показало ГПУ.

Еще раз повторяю, речь шла как-будто по линии идейной борьбы. Мне недавно пришлось слушать на заседании совета Института математики и механики речь проф. Егорова, тогда еще не разоблаченного вредителя. Он выступил со своего рода программной речью и так горячо, со слезой даже в голосе, сказал: «Что вы там толкуете о вредительстве... худших вредителей, чем вы, товарищи, нет, ибо вы своей пропагандой марксизма стандартизируете мышление»...

ГПУ верной рукой вылавливает вредителей. Что же нам, научным работникам и работникам практическим, следует делать? Нам нужно итти на помощь этому верному стражу революции. Нужно выявлять вредителей, которые ради якобы свободы мысли против «стандартизации» мышления ведут свою якобы идейную борьбу. Этих вредителей надо вылавливать, и мы в этом отношении должны помочь ОГПУ.

В. Старовский

«СОЛОМЕННЫЕ МИЛЛИАРДЫ» ВРЕДИТЕЛЯ ВИШНЕВСКОГО

Тов. Хотимский привел ряд примеров, из которых можно было ясно видеть, что основная методологическая неправильность применения статистического метода у вредителей заключалась в математическом формализме. Сущность этого математического формализма состояла в том, что качественные проблемы пытались разрешить при помощи одних количественных построений, вследствие чего математический метод превращался в фетиш, в ширму для прикрытия целого ряда заведомо недоброкачественных выводов.

Примеры, которые приводил т. Хотимский, быть может недостаточно осознаны всей аудиторией, ибо при разборе их неизбежно приходилось оперировать специально-математическими терминами, не всем из присутствующих известными.

Я сейчас остановлюсь на одном конкретном примере вредительства, который может быть вскрыт и осознан без углубления в математические схемы. Речь идет о вредительстве Вишневского.

Прежде всего маленькая историческая справка. Гражданин Вишневский является одним из ближайших соратников Громана. Он руководил до последнего времени в Госплане СССР составлением сводного баланса сельского хозяйства. Я был откомандирован из секции методологии продолжить его дело, не то дело, за которое он был посажен, а дело составления сводного баланса сельского хозяйства.

Тов. Барбе, временно возглавлявшая тогда секцию сельскохозяйственной статистики, обратила мое внимание на крайнее неблагополучие в вопросах оценки сельскохозяйственной продукции. Дело в том, что при составлении сводного баланса необходимо было определить стоимость продукции сельского хозяйства в ценах соответствующих лет и в неизменных ценах 1926/27 г. Как известно, первая оценка преследует задачу изучения объема и динамики ценностей массы продукции, вторая же оценка—изучение объема и динамики физической массы продукции.

Оценка продукции представляется на первый взгляд задачей чисто технической: если известна продукция по ее отдельным видам и известны цены, то вся проблема сводится как будто бы лишь к простому перемножению, к простой арифметике. На самом же деле эта арифметика тесно связана с политикой.

Вишневский взял так называемые «цены реализации» (т. е. средние взвешенные из заготовительных цен и цен частного рынка) и оценил по ним всю продукцию. Эти цены реализации вполне пригодны для оценки т о в а р н о й части продукции, но отнюдь не годятся для оценки нетоварной ее части. Оценивать нетоварную часть продукции нужно очевидно по таким ценам, по которым крестьянин мог бы реализовать ее, если бы отказался от потребления. Совершенно очевидно, что такой ценой является государственная заготовительная цена, ибо потенциальная возможность выпуска на частный рынок дополнительных товарных масс (кроме уже фактически проданных) весьма ограничена

Что же делает вредитель Вишневский? Оценивая всю продукцию по средней цене реализации, он учитывает влияние частной цены не только при оценке товарной части продукции (где она конечно имеет значение и то ограниченное), но и при оценке нетоварной части. При такой установке всякий продукт, который на рынок не поступил, а потреблен внутри крестьянского хозяйства, оценивался с учетом частной цены. Пользоваться такой оценкой можно лишь в том случае, если цену частника рассматривать не как спекулятивную цену, а как «нормальную» цену.

Благодаря принятому Вишневским методу оценки чрезвычайно вздутой оказалась оценка малотоварных продуктов, например соломы и сена, где продажа идет в значительной части на частный рынок, да и самые цены ввиду незначительности продаж носят случайный характер. Мы приводим ниже цены единицы и стоимость всей массы этих продуктов и одновременно для сравнения даем стоимость всей продукции зерновых.

В результате статистических манипуляций продукция соломы и сена оказывается равной двум третям стоимости зерновых, а в 1929/30 г. равной почти на все 100%.

Вряд ли нужно кому-либо доказывать всю абсурдность подобного вывода.

Подобные же результаты получаются и при оценке продукции в неизменных ценах (ибо цены 1926/27 г. были получены тем же методом, т. е. с учетом частника и для товарной и для нетоварной части продукции).

Мы приводим их ниже (см. стр. 42).

Движение цен[1]

Годы	Цена (в коп. за центнер)		Стоимость продукции (в млн. руб.)			Стоимость всей продукции зернов. (в млн. руб.)
	сена	соломы	сена	соломы	соломы и сена вместе	
1927/28	209	116	1 749	1 247	2 996	4 578
1928/29	296	158	2 280	1 588	3 868	6 061
1929/30	463	246	3 300	2 610	5 910	5 982

Стоимость продукции в неизменных ценах (в млн. руб.)[2]

Годы	Сено	Солома	Сено и солома вместе	Все зерно
1927/28	1 780	1 186	2 966	3 826
1928/29	1 665	1 090	2 755	3 807
1929/30	1 618	1 138	2 756	3 774

Надо сказать, что в вышеприведенных табл. 1 и 2 указаны уже и с п р а в л е н н ы е (хотя и далеко недостаточно) под давлением секции воспроизводства Госплана СССР расчеты. Исправления эти коснулись двух моментов: во-первых, выброшена та часть продукции сена и соломы, которая осталась неиспользованной, и, во-вторых для нетоварной части продукции сделана так называемая «транспортная скидка», т. е. из цены реализации сброшены расходы по доставке продукта на рынок.

Все эти исправления были произведены уже в порядке дальнейшего уточнения работы и не были учтены работниками, составлявшими контрольные цифры.

В проекте контрольных цифр на 1930/31 г. были приняты первоначальные, т. е. еще более вздутые для нетоварных продуктов методы оценки. Это тем более странно, что руководители сельскохозяйственной секции еще в прошлом году подымали вопрос об освобождении от соломенного привеска. Мы приводим ниже этот проект, причем для

Стоимость продукции в неизменных ценах (в млн. руб.)[3]

Годы	Сено	Солома	Сено и солома вместе	Все зерно	Все животноводство
1927/28	2 461	1 659	4 120	3 596	5 361
1928/29	2 571	1 634	4 205	3 624	5 352
1929/30	2 513	1 670	4 183	3 472	4 105
1930/31	2 601	2 011	4 612	4 382	4 674

[1] Все цифры взяты из материалов к сводному балансу сельского хозяйства, представленных Вишневским.

[2] Цифры взяты из материалов Вишневского.

[3] Цифры взяты из проекта контрольных цифр на 1930/31 г. Проект этот не получил утверждения в связи с переходом на календарный год.

сравнения даем не только продукцию зерна, но и продукцию животноводства.

Продукция сена и соломы все время превышает по стоимости продукцию зерновых; совершенно несообразно и то, что стоимость продукции животноводства оказывается близкой к стоимости соломы и сена (правда в продукцию животноводства не включена работа лошади, но ведь и корма не исчерпываются сеном и соломой).

Если верить этим цифрам, то все животноводство должно давать убыток. По существу же дело конечно лишь в неправильности оценки: животноводство в основном оценено по заготовительным ценам, а корма—по частным ценам, выведенным к тому же на основании незначительного числа случайных продаж.

Какой смысл могло иметь такого рода грубое искажение важнейших статистических показателей? Вполне возможно, что здесь имело место желание вообще дискредитировать наши плановые показатели, натаскать туда всякой статистической гнили и требухи вроде «соломенных миллиардов». Искажения эти имели однако и другой более актуальный политический смысл. Совершенно неправильное представление о структуре продукции сельского хозяйства, полученное в результате статистических махинаций вредителей, должно было дать базу для различных теорий «о убыточности» и «деградации» нашего сельского хозяйства, теорий, которые развивали и развивают наши буржуазные экономисты и их подголоски из правооппортунистического лагеря.

Искусственное вздутие продукции сельского хозяйства, полученное в результате оценки ее с учетом частных цен, преуменьшало те достижения, которые имеются в области индустриализации страны. Статистические махинации смазывали процесс перехода нашей страны из аграрно-индустриальной в индустриально-аграрную.

Любопытно отметить одну деталь, показывающую, с каким упорством держались вредители за свои «соломенные миллиарды».

Когда Вишневскому было предложено сделать для нетоварной части продукции уже упоминавшуюся выше «транспортную скидку», то он принял ее в таких размерах:

	В процентах
Для зерновых и маслосемян	10
» соломы	12
» сена	15
» картофеля и овощей	15

Между тем естественно было ожидать, что эти транспортные скидки окажутся большими для малоценных продуктов и относительно малыми для более дорогих товаров (ибо процент скидки есть отношение стоимости провоза единицы продукта к цене этого продукта).

Проценты же скидок в том виде, как они даны выше, представляют очевидную экономическую нелепость.

Чтобы дать понятие о грубости допущенных Вишневским неправильностей, мы приводим выше (См. таб. на стр. 42 проценты скидки, установленные сейчас секциями обращения и воспроизводства Госплана СССР.

	В процентах
Зерно	6
Маслосемена	4
Картофель и овощи	15
Сено	30
Солома яровая	50
» озимая	70
Мякина	30

Сейчас результаты работы Вишневского в сельскохозяйственной секции Госплана СССР переделываются.

Освобождение от соломенного привеска и других искусственно вздутых нетоварных частей продукции отнюдь не дает картины снижения динамики продукции нашего сельского хозяйства.

Темпы динамики остаются теми же самыми (а в некоторых случаях оказываются даже более значительными), снижается в ценностном выражении лишь абсолютная масса продукции сельского хозяйства за все годы. Это уменьшение ценностной массы продукции сельского хозяйства соответственно увеличивает долю промышленности в общей продукции нашей страны, т. е. дает возможность установить б лее правильное представление об успехах нашей индустриализации, чем это можно было заключить по статистическим показателям, составленным вредителями.

Такова вредительская цель всех этих искажений. Характерен однако и самый метод, при помощи которого искажения эти получены. Только преклонение перед частной торговлей, перед спекулятивными ценами частника, свойственное всей теплой компании вредителей, могло привести к таким явно абсурдным методам оценки, которые применял Вишневский.

«Соломенными миллиардами» отнюдь не исчерпывается вредительское наследие Вишневского. Следует упомянуть например, что Вишневский упорно отказывался диференцировать цены сельскохозяйственной продукции по отдельным секторам, т. е. упорно не хотел считаться с теми новыми качественными сдвигами, которые произошли в нашей экономике.

Приведенный мною пример показывает, как самые элементраные статистические показатели в руках вредителей превращаются в чрезвычайно острое оружие в борьбе против социалистического плана. Если в таких простых вещах вредители оставались неразоблаченными, то еще легче было им протаскивать те свои статистические расчеты, которые прикрывались вуалью сложнейших статистических формул. Не случайно т. Хотимский посвятил очень много времени освещению математико-статистического вредительства. В связи с необходимостью борьбы с этими вредителями мы должны хорошо владеть математическим методом. Очень остро стоит проблема математико-статистических кадров. Нужно, чтобы наши экономисты-марксисты были вооружены математически-статистическим методом, во-первых, для того чтобы бороться с вредительством и, во-вторых, для того чтобы правильно применять эти методы там, где они нужны. В этом отношении дело обстоит крайне неблагополучно. В целом ряде вузов математико-

статистические дисциплины преподавались и преподаются лицами, мягко выражаясь, неприемлемыми идеологически. В других вузах эти дисциплины просто-напросто угробили или стараются угробить. Недаром центральный орган нашей партии посвятил этому вопросу специальную статью [1]. Вопрос о подготовке кадров, знающих математическую статистику, есть вопрос политический, вопрос борьбы с вредителями в этой области.

Думается, что присутствующие здесь наши молодые кадры, товарищи из Планового института и других вузов, учтут это обстоятельство, учтут необходимость максимального вооружения на этом фронте, чтобы не только во всеоружии встретить врага, но и использовать все те положительные возможности, которые имеются у марксистски реформированной математической статистики при применении ее к измерительной экономике.

А. Боярский

О ТЕОРИИ ЗАТУХАЮЩЕГО ТЕМПА РАЗВИТИЯ СОВЕТСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Если шахтинцы—эти мелкие исполнители того крупного подрывного дела, которое сейчас раскрыто—иногда позволяли себе роскошь выявлять свое враждебное отношение грубым обращением с рабочими, то те, кого будут судить сейчас, эту роскошь—выявлять свое враждебное отношение ко всему нашему общественному строю—позволяли себе в более крупных вещах. Они позволяли себе в вопросах высоко теоретических почти неприкрыто выступать (кондратьево-базарово-громанская группа) со своими установками на капиталистическую реставрацию. Они рассчитывали при этом на нашу недостаточную бдительность, на то, что мы будем в этом видеть чисто идеологическую борьбу и не догадаемся о том, что за ней скрывается практическая вредительская работа. Так или иначе в нашей среде в конце концов нашлись люди достаточно бдительные. Работают ли эти люди в ГПУ, в Госплане или в каком-либо другом учреждении, они—представители рабочего класса, и значит у рабочего класса оказалось достаточно бдительности. Тем самым надежды вредителей не оправдались.

Наша задача, задача научных работников, заключается не только в том, чтобы указать на результаты, не только в том, чтобы опровергнуть выводы отдельных «научных» работ вредителей, но и в том, чтобы вскрыть ход получения этих выводов с тем, чтобы предупредить возможность их повторения в какой-нибудь более замаскированной форме.

Именно поэтому нам приходится на таких, как Базаров, сейчас все-таки остановиться. Ведь если бы нам нужно было просто опровергнуть его основной вывод сам по себе, вывод о затухающем темпе развития нашего хозяйства, то стоила ли бы овчинка выделки. Этот

[1] К о л ь м а н. Против научной мистификации в области планирования, Правда», 31 октября 1930 г.

вывод давно опровергнут всем ходом нашего строительства, он опровергнут тем гигантским подъемом, который мы сейчас переживаем.

Очевидно, что задача научных работников заключается не только в этом, но и в том, чтобы показать, каким путем дошел Базаров до этого вывода, и показать научную порочность этого пути. Вот в чем наша задача сегодня. Тем самым мы конечно еще лучше вооружимся и будем более бдительными, если нам придется еще встретиться с подобным теоретическим вредительством.

О моем, так сказать, «оппоненте» Базарове приходится прежде всего сказать следующее: если Вишневский, о котором говорил Старовский, принадлежит к числу относительно очень мало образованных вредителей, если Громан—этот оркестрант будущей интервенции (только так можно расценивать его предсказание неурожая)—принадлежит к числу несколько более образованных, то Базаров является одним из наиболее образованных, если не самым образованным из вредителей. Поэтому неудивительно, что методы его научного вредительства гораздо более сложны и требуют для их рассмотрения гораздо большей подкованности, нежели методы Громана и во всяком случае методы Вишневского.

Мне придется поэтому коснуться и кое-чего из области математики и даже высшей математики для того, чтобы стал ясен тот путь, по которому Базаров пришел к своему выводу, и тем самым стала ясна его несостоятельность.

В нашей литературе Базаров (как плановик) известен главным образом затухающими темпами. Между тем теоретическое вредительство Базарова заключается не только в этом. Если присмотреться несколько подробнее к его творениям, то можно увидеть в них и полное отсутствие всякого различия подхода к изучению хозяйства при капитализме и при советских условиях, и перепев той же громановской теории об устойчивом соотношении между сельским хозяйством и промышленностью, и общий для всех вредителей взгляд, что довоенный уровень—это та последняя грань, до которой большевики еще способны довести страну, дальше же которой доступ им совершенно закрыт. Эта установка имеется у Громана в виде устойчивого соотношения между промышленностью и сельским хозяйством, она же имеется у Базарова в несколько ином виде.

В подтверждение своих взглядов Базаров приводит ряд выравненных кривых. В отличие от других он пытается обосновать те кривые, при помощи которых он выравнивает фактические цифры нашего хозяйственного развития. У Кондратьева и других—бесшабашное применение параболы «соответствующего порядка». У Базарова попытка серьезно обосновать ту кривую, которую он применяет. Эту попытку можно представить примерно так. Хозяйственное развитие есть процесс роста производства. Этот процесс роста производства выражается в том,что цифра продукции растет. Следовательно можно, представив эту цифру продукции как функцию времени, судить о том, как идет развитие нашего хозяйства. Какова же эта функция? Базаров строит ее диференциальное уравнение. Скорость роста продукции или производная нашей функции пропорциональна,

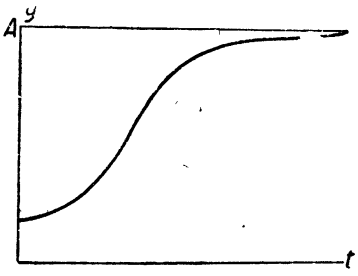
во-первых, величине самой этой функции, так как чем больше развито производство, тем больше организованность рабочей силы, приобретенное ею уменье и т. д. и т. д. (что касается материальной базы дальнейшего роста производства, то о ней у Базарова нет ни одного слова); во-вторых, имеется некоторый уровень A, который лежит выше достигнутого размера производства, и рост производства пропорционален тому расстоянию, которое еще осталось до этого уровня.

Таким образом

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \cdot (A - y),}$$

где t—время, y—размер производства, A—уровень 1913 г. Это дифференциальное уравнение дает после его решения кривую следующего так называемого «эсобразного» вида [1]:

Кривая растет не только замедленно, но никогда не достигает даже предела A, предела 1913 г., к которому она асимтотически приближается. Вот почему у Базарова имеется кроме затухания темпов еще этот недостижимый идеал 1913 г.



Черт. 1.

Как же он обосновывает свое дифференциальное уравнение? Представьте себе, что в капиталистических условиях выброшена на рынок масса какого-то продукта, на который имеется определенная потребность, выражаемая величиной A. Будем следить, как эта масса реализуется. Очевидно, что быстрота реализации будет тем больше, чем больше осталось неудовлетворенного спроса, т. е. чем больше $A-y$. Кроме того каждая купленная единица этого товара является пропагандистом за этот товар, если это товар достаточно хорошего качества. То и другое приводит к приведенному дифференциальному уравнению. Но тут-то Базаров проделывает головокружительное сальто. Выведя это уравнение для реализации выброшенной на капиталистический рынок массы продукта, в главах о советском хозяйстве просто им декретируется применимость его и сюда.

Из предыдущего нетрудно усмотреть, что для обоснования применения этого злополучного диференциального уравнения надо доказать пропорциональность скорости роста продукции, во-первых, достигнутому размеру ее, во-вторых, разнице между последним и неким постоянным уровнем A. В главах о советском хозяйстве Базаров декретирование применимости старого диференциального уравнения несколько подкрепляет ссылками на организованность рабочей силы и т. д. Но все это относится к первой части доказательства.

[1] Ее уравнение: $\boxed{y = \frac{A}{1 + ce^{-A_{kt}}}}$

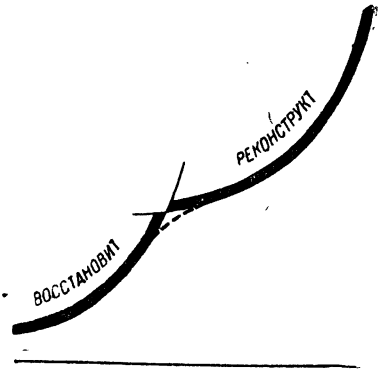
Против нее (пропорциональности скорости роста производства достигнутому размеру его) у нас даже нет особых возражений. Следует лишь выбросить сильно отдающие богдановщиной кивки на организованность и пр., и просто указать на то, что рост производства происходит не в безвоздушном пространстве, а на материальной базе, ширина и крепость которой определяются уже достигнутым уровнем. Вторая же часть (пропорциональность оставшемуся еще не восстановленным, т. е. $A-y$), именно та, которая создает замедление и ставит всему росту предел в виде уровня 1913 г. как недостижимого идеала, у Базарова довольно детально разработана применительно к ходу реализации тиража книги, но ничем не подтверждена применительно к росту советского хозяйства. Правда, не случайно на первых страницах своей книги («Капиталистические циклы и восстановительный процесс хозяйства СССР») Базаров пишет, что наши планы строятся на ведомственных заявках, упирающихся в конце концов в более или менее точный учет потребностей вольного рынка. Если бы это было так, то мы действительно не так уж далеки от реализации тиража книги. Но что наш план не приспособляется к «вольному рынку», а активно на него воздействует и изживает его, что он есть выражение сознательного направления всей экономики страны к быстрейшему осуществлению социализма, скачек из царства необходимости в царство свободы—этого Базаров, как и все вредители кондратьево-базарово-громанской группы, не может, вернее не хочет, понять. Вывод: применение написанного выше диференциального уравнения совершенно необоснованно, произвольно, продиктовано нежеланием понять отличие нашего хозяйства от хозяйства капиталистического, заранее рассчитано на получение тех конечных выводов, которые получил Базаров, а не на научное изучение действительности.

Несколько слов о применимости диференциальных уравнений вообще. Вообще говоря, если мы имеем процесс изменения какого-либо количества, и нужно получить правило течения этого процесса, то употребление диференциальных уравнений безусловно может принести очень большую пользу. Недаром Энгельс говорит, что с переменной величиной математика вступила в область диалектики, а решающая роль в математике переменной величины принадлежит диференциальному и интегральному исчислению. Существо же диференциального и интегрального исчисления именно в диференциальных уравнениях. Следовательно там, где мы имеем дело с процессом изменения количества, уловить его можно хорошо при помощи диференциального уравнения. Но это диференциальное уравнение должно быть построено на основе качественного анализа, а не так, как у Базарова.

Остается еще сказать несколько слов о том одеянии цифр, которым Базаров облек свою эсобразную кривую. Каким образом не получилось резкого расхождения между цифровыми рядами и эсобразной теоретической кривой? Это в конце концов объясняется довольно просто. Если с окончанием восстановительного процесса наступает процесс реконструктивный, то мы не можем проводить через тот и другой периоды одну плавную кривую. На вопросах, связанных с этим, останавливался уже т. Хотимский, критикуя афоризм

Лейбница о том, что природа не терпит скачков. Если мы имеем смену одного периода другим, качественно от него отличным, и если та или иная кривая годится для одного периода, то для следующего периода самая кривая должна быть совершенно другой. Что же происходит на стыке обоих периодов? Здесь встречаются две различные кривые, следовательно не может не произойти скачка. Если мы возьмем период восстановительный и период реконструктивный, то как для того, так и для другого мы будем иметь кривую с возрастающим темпом. При переходе от восстановления к реконструкции эти две кривые встречаются, происходит скачок. Но увидеть этот скачок на цифрах можно далеко не всегда по очень простой причине. Дело в том, что скачок, т. е. смена восстановительного периода реконструктивным происходит не одновременно. На одном предприятии он может произойти в одно время, на другом—в другое, причем промежутки здесь могут быть даже довольно значительные, если иметь в виду не только несколько предприятий одной какой-нибудь отрасли промышленности, а в целом все народное хозяйство. Что же происходит в результате? В результате масса таких разновременных скачков накладывается друг на друга, самый скачок всего хозяйства в целом тем самым смазывается, и получается представление о некоей плавной кривой, проходящей через оба периода (см. черт. 2).

Увидев эту смазь, обозначенную на чертеже пунктиром, Базаров принял ее за замедление темпа, за естественное продолжение кривой восстановительного периода и поспешил эту свою слепоту оформить и обобщить в теории затухающих темпов. Махистская философия закрыла от него действительный ход развития, а политическая враждебность к нашему строю заставила поспешить с далеко идущими обобщающими выводами.



Черт. 2.

Я думаю, что продолжение идеологической борьбы с теми, которые сидят в ГПУ, нисколько не снимает с нас обязанностей вести идеологическую борьбу с нашими врагами, которые находятся на свободе. Поэтому после Базарова я хочу несколько коснуться той якобы поправки, которую пытался внести в построения Базарова Подтягин [1]. Поправка заключалась в следующем: Подтягин отрицает надобность обосновать вид кривой чем-либо иным, кроме тех цифр, которые эта кривая должна выравнять. По примеру целого ряда вульгарных экономистов он применяет просто-напросто прямую линию и затем доказывает, что если наше планирование будет давать директивы с более быстрыми темпами, чем по его прямой линии, то это планирование предполагает насилие над действительностью, и такой

[1] О. Подтягин, см. мои статьи в «Экономической жизни» от 1/I и 1/II 1929 г.

план неизбежно должен провалиться. Прямая же линия принадлежит к линиям с затухающим темпом—это достаточно известно.

Так бесшабашный махизм, лозунг которого—кроЙ по прямой линии все, что попало, и махизм тонкий с диференциальными уравнениями и прочими атрибутами легко столковываются между собой и по вопросу о роли плана и по вопросу о темпах нашего развития.

Наша борьба с Базаровым и базаровщиной началась не сегодня. Не сегодня она и кончается. Задача не только в том, чтобы не ослабить своего напора в борьбе с ее остатками, в борьбе со всякими антибольшевистскими теориями, но в том, чтобы удесятерить свою активность и непримиримость, вести и на теоретическом фронте войну с классовым врагом вплоть до его уничтожения.

Л. Цыпкин

ВРЕДИТЕЛЬСТВО В ПРОМЫШЛЕННОЙ СТАТИСТИКЕ

Мне хотелось бы в дополнение к тому, что здесь сказано, вспомнить некоторые чрезвычайно характерные эпизоды, свидетелями которых мы были на протяжении предшествующих 6 лет борьбы за марксистские методы в области промышленной статистики. Прежде чем коснуться этих отдельных эпизодов, весьма красочных, мне хотелось бы привести некоторое сравнение между методологическими основами тех работ, о которых сегодня упоминали, и теми методологическими положениями, на которых зиждилась статистическая работа народников. Здесь имеется целый ряд чрезвычайно любопытных параллелей, которые нас наводят на путь правильного понимания идей вредителей, разоблаченных ГПУ.

Чем можно объяснить игнорирование к а ч е с т в а как у народников, так и у вредителей? Народники не видели факторов развития капитализма, не верили в развитие капитализма, считали его наносным, чем-то преходящим и следовательно не понимали ведущего значения капиталистических элементов в развитии молодого капиталистического хозяйства царской России. Это привело к тому, что ряд количественных нарастаний рассматривался только с точки зрения количества. Это привело к игнорированию глубоких противоречий капитализма, процессов разложения натуральных форм крестьянского хозяйства, привело к изучению диференциации крестьянского хозяйства в чисто количественном смысле. Народники не видели здесь новых классовых образований и классовой борьбы.

Сейчас мы видим то же закрывание глаз, но не на капиталистические элементы хозяйства, а на бурный рост социалистических элементов. Там не видели капитализма, а теперь те же научные положения лежат в основе работ тех, кто не видит социализма. Тогда полуфеодальные формы и остатки крепостничества возводились в нечто абсолютное, в нечто противоположное капитализму, являющемуся будто чем-то случайным и наносным. Здесь капитализм занимает почетную позицию, занимает место, которое занимали в народнических концепциях остатки феодализма. Капитализм противопоставляется как нечто

абсолютное элементам социализма, т. е. элементы социализма рассматриваются как нечто случайное, как некий изгиб кривой, которая во что бы то ни стало должна будет выравняться.

Уяснение этих основных положений дает нам возможность перейти к некоторой общей оценке статистической методологии современных народников в отношении ее к социализму. Мне кажется, такой подход дает нам возможность увидеть всю необходимость пути от научной книги, от может быть иногда блестящих рефератов весьма парадоксального свойства до Лубянки.

Мне представляется, что борьба за марксистскую статистику, начиная с первого инцидента, с хлебо-фуражного баланса, есть борьба за качественные концепции в количественных измерениях. Эта борьба началась на фронте сельскохозяйственной статистики, перекинулась затем в промышленную статистику, и темпы борьбы по линии промышленной статистики значительно превышали темпы во всех остальных отраслях статистики.

Каковы те условия, которые на протяжении многих лет существования советской власти создавали возможность произрастания этих прекрасных злаков вплоть до соломенных миллиардов, о чем мы сегодня слышали? Одним из основных условий помимо тех, о которых здесь говорилось (слабость марксистских сил и т. д.), является оторванность статистики от непосредственной экономической плановой работы, ее положение во всей нашей организации. Создались условия некоего статистического домашнего хозяйства. В результате мы имели отсутствие политической и экономической ориентации во всей статистической работе. Огромные статистические работы оправдывались тем, что, мол, довольно любопытно было бы встретить в таком-то аспекте те или иные явления. Отдельные моменты не рассматривались с точки зрения какого-либо единого цикла. Статистика не имела своих принципиальных оснований. Этот, я бы сказал, статистический разврат, с которым мы воевали и остатки которого мы выкорчевываем еще и теперь, порождал в то же время и плановый разврат.

В память врезалось чрезвычайно возмутительное явление, которое я до сих пор забыть не могу. Это было в 1926 г., когда мне пришлось участвовать в комиссии Госплана от ЦСУ по установлению количества кожсырья на 1926/27 г. В эту комиссию вошло несколько представителей Госплана, заинтересованных ведомств и один или два представителя от ЦСУ. Я был чрезвычайно поражен тем, что каждое ведомство, в том числе и Госплан и ЦСУ, предлагало различные цифры, причем колебание цифр было в пределах от 8 до 15 млн. кож. В сущности этими цифрами разрешалась судьба частнокапиталистического сектора. Было известно, сколько реализует госпромышленность, сколько получает кооперация. Пределы колебания говорили о том, существует ли частнокапиталистический сектор вообще в этой области. Если бы была принята максимальная цифра, частнокапиталистический сектор был бы равен 50% всей кожевенной промышленности.

Казалось, нужно было заняться в первую очередь проверкой расчетов и выяснением экономических показателей для уяснения тех

цифр, которыми в данном случае оперируют. Если мы устанавливаем цифру 10, говорили соответствующие представители, то вы должны реализовать такую цифру и молчать. Это делалось без всяких пояснений и обоснований. Затем они нашли колебание 8 и 15 негодным, поэтому было принято другое колебание—12 и 15, причем 12 как-будто бы предлагал Ришар, а 15—Лосицкий. В комиссии не могли притти ни к какому соглашению, заседание было отложено. Затем меня известили, что заседание не состоится, так как Лосицкий и Ришар столковались. Так мне и не пришлось узнать, какими способами были исчислены эти варианты.

Насколько я знаю, это не единственный случай; мне приходилось сталкиваться с другими аналогичными методами исчисления.

Такого рода случаи в нашей практике заставляют говорить о том, что плановик должен быть одновременно не только математиком, о чем совершенно правильно говорилось сегодня и о чем совершенно правильно говорил т. Кольман в статье, недавно помещенной в «Правде», мне кажется, что до того, как он станет математиком, плановик должен стать статистиком. В сущности говоря, умение владеть счетом для разрешения экономических и плановых проблем—это есть то основное, без чего плановик не может обойтись.

Мне вспоминается первый год борьбы за знаменитый бланк «Б». Чем был тогда бланк «Б»? Бланк «Б»—это вызов всему старому пониманию задач исследования промышленности. Это был вызов объемным показателям, дающим представление в лучшем случае только об увеличении какой-то продукции, вне зависимости от того, какими способами, на каких заводах, с каким экономическо-эффективным результатом получена эта продукция. Бланк «Б» встретил бурю возмущения на первых порах его проведения. Основное, что руководило этим сопротивлением,—это непонимание диференцированных задач, стоящих перед промышленной статистикой, непонимание и недооценка возможностей рационального воздействия со стороны пролетарского государства на основные элементы производственного процесса нашей промышленности, неверное представление о необходимости такой диференцированной программы и непонимание того эффекта, который может быть в результате этого получен.

Второй момент, на котором мне хотелось бы остановиться,—это борьба за методы выборки и постановки работ по производительности труда. При первой попытке изучения производительности труда, проделанной еще до реформы ЦСУ, была дана установка на репрезентацию коллектива в статистике. Эта установка совершенно игнорировала как самую задачу, так и содержание, которое определяло сущность работы.

Задача состояла в определении динамики производительности труда. Предложение вести эту работу по методу основного массива встретило тогда наиболее рьяные возражения, насколько мне помнится, со стороны Базарова и Кафенгауза.

Интересно сейчас установить, почему собственно предложение взять выборки по основному массиву вызвало такие возражения. Эта выборка ведущей части производства определяет весь ход динамики

дает наиболее резкое подчеркивание именно наиболее высоко организованной передовой части нашего производственного аппарата. Боязнь резко очерченных коллективов с определенным качественным содержанием напоминает боязнь кулака и бедняка у народников, у троцкистов и кондратьевцев.

Мне хотелось бы остановиться еще на некоторых болезнях нашей работы, а именно мне хотелось бы подчеркнуть чрезвычайно любопытное сходство в статистической методологии двух политически отмирающих групп: народников прежнего времени и правых оппортунистов и вредителей, являющихся питательным бульоном для правого уклона в наше время. Мне кажется, что эти два положения должны служить нам руководящей нитью при дальнейшем анализе корней ошибок в статистической методологии.

М. Н. Смит

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ СЛОВО

То, что здесь говорил т. Цыпкин относительно борьбы, которую пришлось выдержать марксистской промышленной статистике, он говорил правильно, но он не договорил одного, а именно, что эта борьба вызвала колоссальное сопротивление со стороны старых статистиков-вредителей. Им не хотелось изменять типа статистики, в котором они были хозяевами. И не кто иной, как сам «министр промышленности» Кафенгауз, был идеологическим вдохновителем всей этой борьбы против группы марксистов-статистиков. И что особенно возмутительно, оный, не удавшийся министр промышленности, посмел однажды и не однажды, а много раз в боях, которые мы с ним имели (чем мы справедливо гордимся), заявить: вот вы-де какие-то «академики», а я представляю интересы советского правительства, я на него работаю, я являюсь его полномочным. Ибо оный гражданин Кафенгауз удивительно обладал тем самым искусством, о котором дают столько показаний вредители,—искусством обволакивания. Он в совершенстве обволакивал людей, с которыми ему приходилось иметь дело, ибо он был не дурак, этот министр промышленности. Он прекрасно понимал, что если он пропустит без сопротивления, без борьбы тот новый тип статистики, за который боролась наша группа, то тем самым обесценится, сведется на-нет та жалкая статистика, хозяином над которой был он. Он боролся за существование той жалкой статистики, которая одно время была гегемоном, он боялся, что придут новые, более сильные, и от его гегемонии ничего не останется. Вот почему нам трудно было бороться сначала за гегемонию марксизма в области статистики промышленности.

Мне сегодня пришлось в другом месте, перед группой французских рабочих, живущих у нас в Москве, выступить с докладом о «промышленной партии». Там я не касалась статистики и изображала картину так, как она была отражена в газетной информации. Они очень внимательно слушали и потом спросили: «Ну, хорошо, если эти граждане имели такое доверие, если им давали возможность работать,

то кто же их в конце концов разъяснил?» Я им ответила, что эта честь принадлежит ГПУ. Здесь т. Ястремский уже выражал благодарность нашему ГПУ. Но, товарищи, конечно чрезвычайно хорошо, когда наше бдительное революционное ГПУ оказывается прозорливее тех, которых обволакивали вредители, когда оно не поддается обволакиванию. Но еще лучше, если в области науки коммунистическая мысль, марксистское общество, которое находится при Комакадемии, превратится тоже в бдительный орган революционной диктатуры пролетариата, в бдительный орган борьбы с немарксизмом. Ибо нужно сказать прямо, что никогда еще мы не видели такой 100-процентной корреляции между вредительством и антимарксистской теорией, какую установило ГПУ. Мы можем гордиться тем, что по линии статистики первые выступили в борьбе с этими антимарксистами, но эта гордость пустяки по сравнению с той гордостью, которую мы когда-нибудь будем иметь право себе приписать, если мы сделаемся ГПУ научной мысли в области статистики и в ее применении к планированию.

Э. Кольман

ПОЛИТИКА, ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИКА [1]

Совсем недавно здесь, в этих стенах, закончилась дискуссия о повороте на философском фронте. Теперь для всех нас ясно, что основной урок этой философской дискуссии состоит в том, что философия, равно как и всякая другая наука, не может существовать в условиях диктатуры пролетариата оторванно от политики, не может существовать оторванно от партийного руководства. Теперь для всех ясно, что все попытки какой-либо теории, какой-либо научной дисциплины представить себя как автономную, самостоятельную дисциплину объективно означают противопоставление генеральной линии партии, противопоставление диктатуре пролетариата. Этот основной урок из дискуссии дал ответ на вопрос о том, нужен ли и какой нужен поворот на философском фронте, и этот урок не должен пройти даром и для естественных и математических наук. У нас не только философия, не только история, не только политэкономия суть партийные науки, но и не может быть никакой беспартийности, никакой аполитичности и в естествознании и в математике.

Партийность в математике—вот это тот основной урок, который мы, математики-марксисты, должны вывести из философской дискуссии.

На протяжении всех 13 лет существования у нас пролетарской диктатуры мы наблюдали, как целые слои интеллигенции пытались окопаться за аполитичностью, пытались аполитичность выставить как защитную платформу, которая должна сберечь их и их науку до того момента, когда по их мнению пролетарской диктатуре наступит конец. Эта аполитичность не всегда выступала в одинаковых формах, в ней можно отчетливо различить три разновидности.

Первая разновидность аполитичности—это такого рода рассуждение, что-де наше дело—наука, святая святых, а общественная суета нас не интересует. Вторая разновидность—более утонченная форма аполитичности—такого рода: признание необходимости участвовать внешне, показано в общественной жизни и деятельности, иногда даже весьма рьяно участвовать. А вместе с тем в области своей специальности полный консерватизм, сохранение прежней позиции. Рассуждение такое: дело партии—делать политику, строить хозяйство, государство. Придется «по гражданской части» в этом участвовать, раз

[1] Доклад на заседании Общества математиков материалистов-диалектиков от 29 ноября 1930 г.

уж иначе нельзя, ну хотя бы в обществе «Друг детей». Что же касается науки—это дело исключительно наше, и его никто не должен касаться. Наконец третья, еще более утонченная, разновидность аполитичности такая: признается даже, что и сама конкретная наука, сама теория имеет некоторое отношение к политике. Можно даже решиться сказать, за материализм ли мы или против, за идеализм или против идеализма. Но и только. Вопрос же о перестройке этой науки, о ее действительной перестройке—этот вопрос считается не подлежащим даже обсуждению. Вот из этих трех разновидностей аполитичности, наблюдаемых на протяжении всех этих лет, за последнее время особенно процветает последняя, как вооруженная наиболее утонченной маскировкой.

Когда мы здесь ставим вопрос о связи между математикой, экономикой и политикой, то делаем это прежде всего под углом зрения связи между философией и партийностью, естественными науками и партийностью в них. Нет нужды прибавить что-либо принципиально новое к статье, напечатанной в «Правде» [1], однако следует по-другому, поскольку мы имеем здесь другую аудиторию, расставить ударения и пополнить доклад материалами, которые в газетной статье не было возможности использовать.

Прежде всего о наличии связи между любыми науками, в том числе и математики, с экономикой и политикой, связи, существующей двусторонне, можно было бы не распространяться. Для всякого, знакомого с теорией исторического материализма, известно, каково отношение отдельных наук к технике и экономике. Энгельс в «Анти-дюринге» прямо говорит:

> «Как и прочие науки, математика возникла из потребностей человека: из измерения земли и вместимости сосудов, из исчисления времени и механики. Но, как и во всех областях мышления, отвлеченные из действительного мира законы на известной ступени развития отрываются от действительного мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, по которым должен направляться мир. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, применяется впоследствии чистая математика к миру, хотя она и заимствована из этого мира и представляет только часть его составных форм, и, собственно, только поэтому она вообще применима к нему».

Далее в письме к Штаркенбургу (25 января 1894 г.) Энгельс говорит следующее:

> «Если, как вы утверждаете, техника в значительной степени (по большей части) зависит от состояния науки, то обратно—наука гораздо больше зависит от состояния и потребности техники. Если у общества появляется техническая потребность, то это оказывает науке гораздо больше помощи, чем десять универ-

[1] «Против «научной» мистификации в области планирования» от 31 октября 1930 г. См. также статью т. Боярского в № 10 «Планового хозяйства» за 1930 г.

ситетов. Вся гидростатика (Торичелли и т. д.) вызвана была к жизни потребностью регулировать горные потоки в Италии в XVI—XVII вв. Об электричестве мы стали знать кое-что разумное только с тех пор, как открыта была техническая применимость его. В Германии, к сожалению, привыкли писать историю наук так, как-будто бы науки свалились с неба».

Надо бы высказать сожаление по поводу того, что и у нас дело обстоит не лучше. Во-первых, у нас что-то не привыкли писать историю наук, а то немногое, что написано по истории наук у нас, очень мало отличается от охарактеризованного Энгельсом писания истории наук в Германии конца прошлого века.

Итак на вопросе влияния на развитие математических наук развития техники, экономики, а также философии, можно было бы не останавливаться. Но ведь мало установить эту связь, необходимо этот вопрос конкретно разработать. Между тем этот вопрос нами совершенно не разработан, перед нашим Обществом математиков материалистов-диалектиков стоит задача взяться за его разработку, начать изучать наши математические науки с точки зрения их связи с техникой, экономикой, политикой. Не стану еще раз цитировать указания Ленина на этот счет [1]. Польза от такой разработки истории математических наук будет двоякая. Прежде всего, как указывает Ленин, без такой диалектическо-материалистической разработки истории отдельных конкретных наук нельзя по-настоящему разработать самую теорию материалистической диалектики, самую теорию исторического материализма. Но не в меньшей степени такая разработка необходима и для нашей науки—для математики. Совершенно немыслимо иначе уловить моменты материалистической диалектики в математике, преобразовать самую математику на основании марксистско-ленинской методологии, чем таким путем, когда возьмем неоторванные проблемы, неоторванные категории математики, возьмем их не только в их логической, но вместе с тем и в их исторической связи.

Мне кажется, что основная проблема, которая должна быть поставлена и с которой мы должны начать, которая должна быть разработана не только логически, но прежде всего исторически, проблема, на которой мы должны показать единство исторического и логического момента—это проблема п р е д е л а. Недаром у Гегеля в «Науке логики» целых 60 страниц посвящено вопросу о пределе. Это—та узловая точка, в которой математика превращается из математики статики в математику динамики, та точка, где элементы диалектики выпирают наружу. И вот разработка этого основного понятия о пределе, связанного с диференциалами, интегралами, диференциальными и интегральными уравнениями, вопросов, группирующихся вокруг этой основной категории, должна быть нами начата в первую очередь. Для их разработки имеется материал у Гегеля, целый ряд страниц у Энгельса, имеется еще не разработанное математическое наследство у Маркса, имеются замечания в философских тетрадях Ленина. Начиная с этой разработки, мы несомненно перейдем и

[1] IX Ленинский сборник, стр. 139; XII Ленинский сборник, стр. 315.

к другим категориям, разработка которых, как может показаться, должна бы предшествовать, например о формальной и диалектической логике в математике, о развитии понятия о числе, о связи между геометрией и математикой и т. д. Но мне кажется, основное, за что мы вначале должны ухватиться,—это понятие предела. Возникновение этого понятия, возникновение диферециального интегрального исчисления,— все эти вопросы должны быть разработаны с точки зрения их связи с экономикой, с развитием производительных сил, производственных отношений данной эпохи и т. д.

Но нам нужно остановиться не только на том влиянии, которое на математику оказывают экономика, техника, естествознание, философия, политика и т. д., но и на том, какую вспомогательную роль играет математика по отношению к только что названным идеологиям. Прежде всего для прежних господствующих классов математика играла роль служанки и помощницы в защите их интересов, господства, математика была на службе религии, на службе поповщины,— philosophia ancilla theologiae—одна из «блестящих» страниц истории математики. Незачем здесь останавливаться на таких общеизвестных примерах, как Блез Паскаль или занимавшийся апокалипсисом Ньютон. Можно упомянуть хотя бы наших «отечественных» математиков сравнительно недавнего времени, всю так называемую московскую математическую школу, начиная с Цингера, Бугаева, Некрасова, кончая более молодыми—Васильевым, Богомоловым, Флоринским, Егоровым,—весь этот букет математиков-идеалистов, защитников самодержавия, религии, всех тех, кто добросовестно постарался, чтобы показать, что математика, эта «объективнейшая», «точнейшая» наука свидетельсвует о незыблемости идеализма как научного мировоззрения, о непоколебимости эксплоататорского строя, который весь этот идеализм всячески подпирал. И по этому вопросу кроме десятка страниц в вышедшей книжке тов. Егоршина, где дан краткий обзор «заслуг» русских математиков на идеалистическом поприще, у нас ничего не написано.

Задача математиков марксистов-ленинцев—разработать этот вопрос, дать обстоятельный труд «Математика на службе у поповщины». Наши молодые товарищи должны засесть за соответствующие источники, должны дать целую серию таких изысканий, в том числе и общедоступных, как в международном разрезе, так и в «российском».

Что математика служила мракобесию не только в прошлом, но что она оказывает ему услуги и в настоящем, всем известно. Такой черносотенный идеалист, как Лосев, в книге, вышедшей в Москве в 1927 г., «Античный космос и современная наука» ссылается на другого попа, Флоринского, на его книгу «Мнимость и геометрия». Сам от себя Лосев прибавляет рассуждение о том, как теория относительности приводит неизбежно к платонизму. Вот основная формула теории относительности, там есть известное смещение:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

— Здесь,—говорит он,—весь платонизм в этой формуле. И у Флоринского прямо сказано, что мнимое дает нам возможности такой

интерпретации, что в четырехмерном пространстве есть направление, по которому можно прямиком из нашей земной юдоли попасть в преисподнюю, направление, по которому Данте свершил описанную им в «Божественной комедии» экспедицию. Здесь перед нами не только анекдот, хотя бы и действительно имевший место. Ведь эта книжка вышла при советской власти. Флоринскому удалось совмещать ее написание с пребыванием на руководящей научно-исследовательской работе в органах ВСНХ. Отсюда видно, что «Математика на службе религии», «Математика на службе идеализму»—это вопросы сегодняшнего дня; нельзя успокаиваться, что опасность миновала, нужна напряженная борьба и работа по разоблачению математиков—«образованных» лакеев поповщины.

В подтверждение религиозной роли математики приведем еще одну только цитату из работы Буняковского «Основы математической теории вероятностей».

> «Некоторые философы в видах предосудительных пытались применять формулы, относящиеся к ослаблению вероятности свидетельств и преданий к верованиям религиозным, и тем поколебать их. Для опровержения их выводов стоит только принять в соображение, что всякое следствие, выводимое из аналитической формулы, не может быть не чем иным, как только развитием первоначального предположения, на котором формула основана. Если предположение ложно, то и следствия анализа будут ошибочные. Поэтому прежде всего должно разобрать основательно предположение, служащее точкой исхода. Когда этот разбор приведет нас к заключению, что в духовном мире есть такие факты, которые не подчинены физическим законам, тогда все злонамеренные умствования лжефилософов рушатся сами. В статье Certitude (Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, tome VI) читатели найдут примечательную выписку из сочинения аббата Прад: «Sur la verité de la rèligion». В этой выписке с необыкновенной силой ума и с убедительным красноречием рассмотрен подробно вопрос, которого мы здесь только коснулись».

Тут совершенно ясно сказано, что всякая «лжефилософия», т. е. материализм, рушится, раз предположим, что духовный мир не подчинен физическому, а также признается бесспорным, будто посредством математики можно вывести все, что угодно, все зависит только от предположений. В этом утверждении действительно имеется зерно истины. Метод математики есть подсобный метод, он не может заменить метода исследования той или другой конкретной науки. Это надо запомнить, когда мы перейдем к следующему вопросу: математика на службе экономики.

По вопросу, насколько математика может быть использована в области экономических и социальных наук, встречается ряд неправильных взглядов. Прежде всего очень часто встречаем огульное отрицание возможности применения математики в общественных науках или во всяком случае с настолько большим ограничением по

сравнению с науками естественными, которое фактически равносильно отрицанию возможности ее применения. Указывают на то, будто существуют между собой не связанные, ничего общего не имеющие закономерности: одни—верные в области естественных наук, другие—в области наук социальных, а потому-де математика применима только к наукам естественным, а к социальным наукам, в частности к политэкономии она неприменима. В лучшем случае делается исключение для статистики, но статистику при этом не считают за настоящую науку, так как про нее можно слышать такие выражения, что статистикой можно что угодно доказать, а вот в теоретической политэкономии, науке настоящей, о применении статистики и речи быть не может. Такой взгляд, нужно признать, основывается на глубоком методологическом заблуждении; трактуя материальный мир не как нечто единое, он находит в нем известный дуализм, разрыв в единстве: нет связи между закономерностями природы и закономерностями общества. Это конечно ошибочный взгляд. Хотя мы и не хотим и не можем найти оправдания этому взгляду, но на некоторое снисхождение он может претендовать, потому что этот взгляд является своего рода реакцией против другого, противоположного, но не менее неверного взгляда.

Второй, не менее ошибочный взгляд—будто бы закономерности природы и закономерности общества тождественны, при этом все равно, трактуется ли общество по законам природы или трактуется ли природа по законам общества, это для нас в данном случае безразлично.

Единство закономерностей природы и общества отнюдь не означает их тождества. Законы общества имеют в себе нечто специфическое, нечто особое, качественно отличное, чем они и отличаются от законов природы. Но, несмотря на эту специфичность, несмотря на эту качественную особенность, связь между этими закономерностями достаточно прочна. И математика как наука прежде всего о количестве, а затем в дальнейшем своем развитии как наука о мере в состоянии помочь изучать эти законы общества так же, как она помогает развивать законы природы. Но это не значит, что должны делаться попытки подменить методологию данной науки,—будь это методология политэкономии, будь это методология физики, методология математики, так как ничего кроме спекуляции, пустой абстракции, не имеющей никакого реального значения, из этого не получится. Математический метод должен применяться только тогда, когда нам уже удалось получить достаточно простые, достаточно однородные, поддающиеся математической обработке количественные взаимозависимости между отдельными явлениями. Так же обстоит дело и в политической экономии, так же обстоит дело и в науках общественных.

Но здесь есть и разница, состоящая в том, что общественные науки во много и много раз сложнее, чем науки естественные, и поэтому применение математического метода, как подчиненного метода данной науки, скажем, метод политической экономии, это применение может наступить повидимому только после чрезвычайно большой упорной экономической работы, которая конечно качественно отлична от работы, которую приходится проделывать физику, химику или биологу, имеющим дело с качественно более простыми явлениями мате-

риального мира. Надо также иметь в виду, что поскольку естественные науки развились столетиями раньше, чем общественные, поскольку они имеют неизмеримо более богатую историю, то и сама математика, находясь на службе у естественных наук и развиваясь благодаря их развитию, свое внимание направила на изучение закономерностей этих наук, свой «аппарат» «приспособила» к этим естественным наукам. Вопрос о применении математики к общественным наукам почти не ставился или ставился только спорадически, и поэтому математика не успела еще приспособить свой аппарат так, чтобы он мог работать на эти общественные науки. До сих пор имеет место самое скудное применение математических методов в общественных науках.

Здесь прежде всего нужно указать на применение математики как подсобного метода исследования в работах самого Маркса и прежде всего в «Капитале». Конечно основной метод Маркса, которым он вел исследование, это метод социально-экономического анализа, т. е. метод той науки, которую он создал. Но Маркс использовал при этом и математический метод так же, как любой физик использует математический метод в помощь своим физическим методам исследования. Некоторые товарищи считают однако, что у Маркса математические формулы служат только иллюстрациями к экономическим закономерностям, которые он открывает. Такой взгляд—глубокое заблуждение. На деле это весьма близко перепеву буржуазной клеветы на Маркса, будто он ничего не смыслил в математике, вопросами математики занимался по-диллетантски, а также такого рода рассуждениями, будто политэкономия—«неточная» наука, а поэтому «точная» наука, математика, в ней применяться не может. Все это конечно совершенно не соответствует действительности. Мы имеем свидетельство Энгельса и самого Маркса о том, что Маркс весьма серьезно смотрел на применение математического метода как подсобного, подчиненного экономическому анализу в самой политической экономии. Маркс пишет 31 мая 1873 г. Энгельсу (письмо это на русском языке еще не опубликовано и будет опубликовано, кажется, в шестом сборнике Института Маркса и Энгельса)[1]:

> «Ich habe hier M o o r e eine Geschichte mitgeteilt, mit der ich mich privatim lange herumgebalgt. Er glaubt aber, dass die Sache unlösbar ist, oder wenigstens, wegen der vielen und grossenteils erst auszufindenden Faktoren, die darin eingehen, pro tempore unlösbar ist. Die Sache ist die: Du kennst die Tabellen, worin Preise, Diskontrate usw. in ihrer Bewegung während des Jahres usw. in auf und ab steigenden Zickzacks dargestellt sind. Ich habe verschiedenemal versucht—zur Analyse der Krisen,—diese up and downs als unregelmässige Kurven zu berechnen, und geglaubt (ich glaube noch) die Hauptgesetze der Krisen mathematisch zu bestimmen. M o o r e, wie gesagt, hält die Sache einstweilen für untunbar, und ich habe beschlossen for the time being es aufzugeben».

[1] Der Briefwechsel zwichen F. Engels u. K. Marx 1844—1883, Bd. IV, Stuttgart 1913.

«Я сообщил тут Моору одну историю, с которой я лично долго возился. Он однако думает, что задача неразрешима, или по крайней мере временно неразрешима, из-за многих и большей частью лишь подлежащих определению факторов, которые в нее входят. Задача такова: ты знаешь таблицы, в которых изображены движения цен, процента и т. д. в течение года в форме поднимающихся и падающих зигзагов. Я несколько раз пытался для анализа кризисов вычислить эти подъемы и падения как нерегулярные кривые, и думал, и думаю и сейчас, из них математически определить основные законы кризисов. Моор, как сказано, считает задачу пока невыполнимой и я решил на время от нее отказаться» [1].

Мы имеем и другие заявления, например в примечании Энгельса к «Капиталу», где он указывает на то, что Маркс изучал ряд вопросов именно с помощью математического метода. Неразработанное наследство самого Маркса наверно, когда оно будет разработано, покажет, каким путем Маркс думал применять математический метод как подсобный метод, могущий помочь на определенном этапе выявить те или другие закономерности, после того как имеется уже достаточный материал по экономическому анализу. Но надо сказать прямо, что в нашем распоряжении имеется гораздо больше примеров такого применения математического метода к политической экономии и к общественным наукам, которое ничего общего с марксизмом не имеет. На этих примерах позвольте остановиться.

В статье в «Правде» говорится о центрографии как об одном из таких типичных примеров лженаучного применения математического метода к экономическим наукам. Можно было бы не останавливаться вторично на этом вопросе, если бы сами центрографы не дали повода к тому, чтобы еще раз праздновать их именины. Дело в том, что центрографам не понравилась статья в «Правде», и они в открытом письме, направленном ко мне, высказывают неудовольствие тем, что статья недостаточно занялась центрографией. Поэтому спешу восполнить этот пробел. Центрографы утверждают, что центрография может дать что-нибудь ценное для экономического анализа. Если взять статью одного из виднейших центрографов Мительмана, напечатанную в «Плановом хозяйстве» за 1929 г. в № 10, то там мы читаем такую фразу: «Центры крупного скота и лошадей близки к центру населенности, центры размещения свиней западнее центров населенности, центр размещения овец южнее центра населенности» и т. д. Я не проверял этих вычислений, по каким формулам центрографы определяли центры свиней, центры овец, центры населенности и т. д.,—по формулам ли Менделеева:

$$\operatorname{tg} D = \frac{\Sigma p_i \sin d_i \sin l_i}{\Sigma p_i \cos d_i \cos l_i};\quad \operatorname{tg} L = \frac{\cos D \Sigma p_i \sin l_i}{\Sigma p_i \cos d_i \cos l_i},$$

или по формулам Вейнберга:

$$\bar{\varphi} = \frac{\Sigma Q_i \varphi_i}{\Sigma Q_i};\quad \bar{\lambda} = \frac{\Sigma Q_i \lambda_i \cos \varphi_i}{\Sigma Q_i \cos \varphi_i}$$

[1] Переписка между Ф. Энгельсом и К. Марксом 1844—1883, том IV, Штутгарт 1913.

или еще по каким-нибудь другим формулам, потому что у них есть целый склад таких формул, которые немного друг от друга отличаются: в одних больше косинусов, в других меньше косинусов, в одних много тангенсов, в других большое количество сигм и т. д. Но положим, что это верно. Я спрашиваю центрографов—какой же вывод из всего этого? Что если было бы наоборот, если бы например центр овец был не южнее, а западнее, или если бы центр свиней был бы восточнее, а не севернее, что из этого получилось бы? Ведь эти «центры» получаются так, что к месту каждой овцы прилагается вектор в направлении земного притяжения, все эти векторы складываются по методу параллелограма сил, и так получается центр тяжести овец, свиней и т.д.

Понятно, что можно любые явления математически между собой координировать. Возьмем например известную задачу о возрасте капитана и водоизмещении судна. Можно даже написать научное исследование по этому вопросу. Но какая здесь экономическая подкладка, какие можно сделать выводы из всего этого—совсем непонятно. Дело обстоит так, что всякое географическое размещение экономических элементов, скажем производительных сил или источников сырья и т. д., приводит конечно к определенному центру. Наоборот, исходя из данного помещенного на карте центра, можем ли мы что-нибудь определенное сказать об экономической структуре района или нет? Конечно нет. Можно например представить такой блестящий случай, что центр сырья и центр рабочей силы полностью совпадают. Между тем на самом деле это может быть вследствие такого положения: скажем, на крайнем севере и на крайнем юге имеются источники сырья, а на крайнем востоке и крайнем западе—места накопления рабочей силы. Центры тут будут совпадать, но экономически это будет ничуть не блестящий район.

Вся эта путаница объясняется вот чем. Центрографы рассуждают так: «Положим, образуется средняя цена. Средняя цена безусловно имеет смысл. Почему же не должна иметь смысла географическая средняя?» Они не понимают такой простой вещи, что средняя цена потому имеет смысл, что цены между собой связаны, что здесь налицо определенный процесс, который регулируется законом стоимости. А в центрографической средней ничего подобного не имеет места. Экономическая теория здесь подчинена географической. Но центрографы абсолютно не в состоянии понять ни этого, ни того, что это простое перенесение в эту теорию механической концепции. В этой же статье Мительмана напечатана такая вещь: «Теорема I. Механическое понятие центра инерции символически есть полный аналог статистического понятия взвешенной средней». Также и теорема II, III. Одним словом, что ни теорема, то механика твердых тел. Далее следуют иллюстрации, и в конце концов можно подумать, что перед нами учебник физики для рабфака с рисунками рычагов Архимеда, движущихся под разными углами. Для наглядности тут еще и стрелка нарисована как на весах, чтобы никто не спутал, что здесь дело в равновесии. Таким образом мы имеем здесь прямой перенос понятий механического равновесия параллелограма сил в экономику, подмену экономики географией, геометрией и механикой-статикой. Центро-

графическая школа не новая, и центрографы ссылаются на ее происхождение и на то, что ею занимаются за границей. У нас она от Менделеева. А в Америке такими вещами и таким делом занимаются видные институты, покровительствуют видные экономисты, как Ирвинг Фишер, слава которых повидимому не дает спать кое-каким нашим меценатам. Есть такие люди, как например Хифорд в Америке, во Франции Мерио, заполняющие страницы статистических журналов центрографическими измышлениями в честь и хвалу империализма. Но мне кажется, что это не может служить оправданием к тому, чтобы все это переносить к нам и выдавать за науку и вдобавок за марксизм.

Для чего же вся эта центрографическая мудрость используется? Там, за границей, она используется для оправдания империализма. Но и у нас господа центрографы также не дают маху. В статье Мительмана мы читаем, что «империалистические тенденции в колониальной политике САСШ подмечены центрографически» и далее, что «движение центров САСШ с востока на запад—центрографический закон». Отсюда к тем теориям, которые развивают коллеги наших центрографов, только один шаг. Но Мительман переносит эти американские «научные» достижения на нашу почву, заявляя следующее: «Как особенность одного из центров, отметим, что центр населенности Дальневосточного района, благодаря изогнутости территории, находится вне района—в Манчжурии». Для чего отмечена эта «особенность»? Какие предлагается сделать из этого выводы? Такой ли вывод, что Чан-Сюэ-Ляну не мешало бы осведомиться о центрографической науке, о тяготении Дальневосточного района к центру, лежащему в Манчжурии? Или обратный вывод, что русским нужно завоевать эту Манчжурию? Этот вывод—сменовеховский. Что это имеет общего с марксизмом и с наукой вообще? Это конечно очень трудно сказать. Но все-таки во всем этом есть определенная система, и не надо забывать, что центрография имела свой приют в недрах Госплана, что кабинет центрографии существовал (и был только недавно ликвидирован) при Институте экономических исследований Госплана.

Не надо забывать, что центрография не есть отдельное случайное явление, что наряду с этим мы имеем целый ряд похожих чудес, хотя бы те конъюнктурные чудеса, которые посредством математики вытворялись у нас. Или взять хотя бы те экономические барометры, которые создавались Бобровым и др. на страницах очень почтенных журналов. По этим вопросам здесь обстоятельно говорилось на докладах товарищей Ястремского, Хотимского, Боярского, Старовского и др. Этим делом занялось родственное нам общество статистиков-марксистов.

Лженаучное применение математики к экономике—не изолированное явление. Возьмите такие забытые отрасли как, скажем, товароведение, балансоведение, бухгалтерия и т. д., посмотрите, что там делается. Вот например сочинения Рудаковского «Теория балансового учета» [1]. Эти книги переполнены математическими формулами, причем там не ограничиваются скромной алгеброй, как это мы имеем у Мительмана. Ничего подобного. Там имеют дело и с криволинейными

[1] Ч. I и II, изд. Макиз, 1928 г.

интегралами, и с диференциальными уравнениями в частных производных, с теорией комплексов и инвариантов, и с функциями Бэра,— словом, весь арсенал современной математики пущен в ход, для того чтобы «доказать», что закон обмена является частным случаем закона тяготения[1], или чтобы с помощью лоренцовых трансформаций, теоремы Жордана и прочего нагромождения всяческих теорем, уравнений термодинамики и другой неизвестной белиберды выразить такие прописные истины, вроде того, что «оценка статической и динамической части одной стороны баланса—дебитовой—должна быть равна оценке статической и динамической стороны баланса—кредитовой», в такой убедительной и высоконаучной форме[2]:

$$\iint \varphi \Delta \psi dxdy + \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \iint \psi \Delta \varphi dxdy + \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

и таким образом окончательно мистифицировать вопрос, в котором, вообще говоря, недурно разбирается любая подмосковная молочница. О том, что под все это подводится база самой реакционной философии, отрицание причинности, агностицизм и т. д., и говорить не приходится.

А ведь по этому руководству ведется преподавание в наших школах, обучаются тысячи заочников. Не ясно ли, что в данном случае математический метод, примененный вот таким образом к экономическим наукам, является непосредственным орудием вредительства, является средством затемнения мозгов пролетарского студенчества? Вредительство ведь далеко не ограничивается тем, чтобы портить продукты и машины, создавать неверные планы и т. д. Оно проникает и проникло в нашу теорию, в науку, в преподавание. И для того чтобы создать завесу, чтобы не было возможности так легко разобраться в этом вредительстве, чтобы не было так легко разоблачить его,—легче всего мистифицировать все пифагореизмом, формулами, натасканными откуда ни попало. Возьмите такую скромную область как товароведение или бухгалтерию, где ставится вопрос о вычислении остатков. Вам кажется, что этот вопрос ничего общего не имеет с математикой, с нашей темой? Напрасно, вы ошибаетесь. Оказывается, что для вычисления остатков математически выводится формула, которая будто верна для всех времен и которая на практике приводит к тому, что при планировании разница между дефицитными товарами и недефицитными исчезает, и таким образом все планирование искажается.

Представьте себе, что получится например в кооперации, где не ее руководители занимаются вычислением остатков, а ученые бухгалтера, которые обучались этому и которые обучают других по определенным математически выведенным формулам, ничего общего не имеющим с тем экономическим укладом, к которому их применяют. И получится то, что при основанном на таком определении планировании остатков окажется, что будут забрасывать периферию избыточными товарами, в то время как недостаточных как не было, так и не будет. Такое явление в работе кооперации имело место. И вот, когда

[1] «Счетное исчисление», стр. 105—112.
[2] Там же, стр. 136.

покопаешься глубже, то окажется, что дело здесь в математической дымовой завесе. Таких примеров можно привести много и из других областей.

Все эти примеры прямо кричат о том, что мы, члены Общества математиков-марксистов, до сих пор не сделали ничего, чтобы посмотреть на все эти так называемые прикладные науки и посмотреть, как там злоупотребляют математикой. А сделать это нужно и сделать не откладывая. Перед нашим математическим обществом и обществом статистиков-марксистов стоит сейчас задача генерального пересмотра всех этих забытых, считавшихся почему-то второстепенными подсобных наук, как бухгалтерия, как теория счетоводства, теория баланса и т. д. и т. п., и тогда натолкнемся на то, что необходимо эти науки перестроить, необходимо из них выбросить весь лишний вреднейший хлам, который в них накопился.

Однако надо сказать прямо, что мы не только плохо критикуем и плохо изучаем то, что делают наши враги, но если мы возьмем наш лагерь, то в нем, оказывается, имеются такие явления, которые объективно смыкаются с этими только что здесь мною перечисленными явлениями. Здесь можно увидеть ненаучное пользование, зачастую просто злоупотребление математическим методом в области общественных наук, в области политэкономии и т. д. И вот здесь необходимо остановиться на одной теперь может быть уже многими забытой попытке применения математики к одной специальной области экономики—к вопросу о денежной эмиссии. Эта попытка выявить математические законы денежной эмиссии относится правда к 1922 г., но остановиться здесь на ней следует потому, что она является типичной для такого рода ненаучного, вредного фокусничания с математическими формулами в области экономических наук, для совершенно некритического преклонения перед махрово-буржуазными теориями.

Автор «Математических законов денежной эмиссии» и не скрывает того, что он за основу взял количественную теорию денег, и ссылается при этом на такой авторитет, как известный Фалькнер. У Фалькнера он почерпнул всю ту экономическую основу, которая позволила ему притти к заключению, что у нас при военном коммунизме или в начальном периоде нэпа эмиссия шла независимо от накопления и от государственного регулирования, независимо от чего бы то ни было, что она шла как простая показательная функция времени. Денежная эмиссия получается значит как самодовлеющая, чисто математическая концепция. Упоминание этой работы своевременно еще и потому, что еще совсем недавно, в третьем кондратьевском сборнике на эту работу ссылаются и отзываются о ней похвально. Там указывается на то, что количественная теория денег нигде не нашла у нас такого хорошего применения, как в этой работе, которая ставится в один ряд с работами Ирвинг Фишера. Здесь объективно смыкаются кондратьевский сборник, экономист империализма Ирвинг Фишер и ненаучное фокусничанье с математикой, проделываемое в данном случае как-будто марксистом.

Остановимся еще на одном примере. В стенах Коммунистической академии ставился доклад по вопросу о математической интерпрета-

ции социальных законов. В этом докладе указывается на то, что может дать такая математическая интерпретация социальных законов. Из тезисов этого доклада выходит, что эта интерпретация дается в совершенно несвязанном виде с тем политическим и социальным строем, к которому она относится. Например выводится формула (при отсчете времени с 1790 г.) для САСШ, выражающая рост техники

$$N = 38\,414 \cdot 10^{0{,}0125T}.$$

Оказывается, докладчик открыл секрет того, почему до сих пор не удавалось математически выразить социальные законы: потому что не было измерителя производительных сил.

А измеритель производительных сил—это количество зарегистрированных патентов на изобретения. Если взять этот измеритель, то все идет гладко, и получается красивая показательная кривая, которая дает нам все закономерности.

Можно было бы с улыбкой отнестись к таким наивным начинаниям, если бы они не приносили непосредственный вред нашему делу. Ведь это «научное» фокусничанье дает повод нашим врагам говорить: «видите, к чему приводит применение математики к политической экономии, к чему приводит марксизм, к чему это приводит, когда марксисты берутся за точную науку».

Здесь имеем буквально то же самое явление, что и в других научных областях. До сих пор среди большинства советских ученых, в том числе и математиков, у нас существует такой взгляд, что о марксизме не вредно говорить, не вредно поклясться в марксизме, но, что материалистическую диалектику можно было бы применять к их конкретной науке, в частности и к математике, об этом они и знать не хотят. А что отсюда получается? Отсюда получается то обстоятельство, что среди нашей молодежи распространены самые упрощенные взгляды на вопрос о применении материалистической диалектики в математике.

На-днях одному из товарищей, который делал доклад о диалектической логике в математике, наши товарищи, будущие научные работники, поставили вопрос примерно так: покажите нам такое дифференциальное уравнение, которое не решается теперь и которое можно разрешить применением материалистической диалектики. Для них это критерий применения материалистической диалектики в математике! И если такого уравнения показать нельзя, то, мол, незачем говорить о диалектике. Такой подход в этой области несомненно стимулируется тем фокусничаньем, которое мы наблюдаем в области применения материалистической диалектики к математике. Разве мы не имеем сейчас ряда книжек и рукописей по вопросам диалектики в математике, по материалистической диалектике в преподавании математики и т. д., где хотят свести все вопросы к тому, что математика есть прейскурант иллюстраций для диалектических категорий, как например единство противоположностей, переход количества в качество и т. д. Делается это по следующему рецепту: берется какая-нибудь давным-давно известная задача и переводится на язык диалектики. Получается так, что все, чему обучали по Малинину—Буренину,—собственно говоря, материалистическая диалектика и больше ничего.

Стоит только изменить название—и все будет прекрасно. Можно назвать одну такую работу, напечатанную, правда, только в 60 экземплярах (считаю, что и этого довольно), «Диалектика в математике» в издании Коммунистического университета национальных меньшинств Запада. Повидимому автором математика так и преподается. Но этим наносится двойной вред: во-первых, неправильно ориентируется подрастающее поколение, во-вторых, книга дает оружие тем, кто стоит на позиции, скажем, Делевского. В его книге «Диалектика и математика», хотя и старой, но имеющей все еще большое значение, как евангелие всей буржуазной математической профессуры, утверждается, будто «математика не только не компрометирует себя оправданием диалектики, но по духу и содержанию является полным отрицанием и опровержением последней». Нынешние Делевские будут ссылаться на наших упростителей, будут говорить: вот к чему приводит ваш марксизм, ваша диалектика. Против упрощенчества, против псевдомарксизма, против злоупотребления математическим методом, против жонглирования диалектической терминологией нам нужно бороться не меньше, чем мы боремся против применения математики на службе у вредителей. Эти два ряда явлений объективно между собой смыкаются. Борьба должна вестись не только против враждебного лагеря, но и против методологических искажений в нашем лагере и здесь борьба должна быть не менее непримиримой.

Спрашивается, а что же мы можем дать положительного? Мне кажется прежде всего (как я уже говорил вначале) мы должны разработать вопросы истории математики с точки зрения ее связи с историей техники, историей естествознания, с историей экономики и с политикой, чтобы тем самым помочь разработать материалистическую диалектику. Но это единственный путь, дающий возможность на основании исторической разработки отдельных категорий математики перестроить на материалистически-диалектические рельсы саму же математику. Первым узловым пунктом здесь должна быть разработка вопроса о пределе. Во-вторых, это разработка вопроса относительно исторической роли математики на службе у буржуазной идеологии вообще и у поповщины в частности.

Что же касается вопроса о применении математики в политической экономии и вообще в общественных науках, то мне кажется, что здесь мы должны поставить перед собой следующие задачи: во-первых, пересмотреть все то, что делается в разных научно-исследовательских институтах ВСНХ, наркоматов, в разных учебниках и пособиях по этим отдельным конкретным экономическим наукам, перестав считать эту деловую работу черной, недостойной для жрецов «чистой» науки. Надо этим заняться вплотную и посмотреть, что делается в счетоводстве, в бухгалтерии, в финансовых науках и т. д. Это одна из основных задач. Мы должны далее взяться за разработку всего того, что имеется в работах Маркса по вопросу о применении математического метода к политической экономии. Мы об этом наследии знаем только по наслышке, только по отдельным отрывочным замечаниям Энгельса. Этот вопрос должен быть сдвинут и разработан. Конечно здесь неуместно заниматься прогнозами. Но все-таки следует указать,

что, когда мы серьезно подойдем к этой проблеме, то и сама математика не сможет остаться нетронутой. Мне кажется, что тогда увидим насколько математика, которая все время приспособлялась исключительно только к вопросам естествознания, плохо приспособлена к вопросам, которые выдвигаются науками общественными. Можно показать хотя бы один пример; весьма интересный с этой точки зрения. У Маркса разработана схема воспроизводства в абстрактном капиталистическом обществе. Во втором томе «Капитала» имеются указания на то, что эта разработка является только первым приближением, потому что Маркс намеренно не учел тех изменений, которые выступают тогда, когда вместо стоимостей выступают цены производства. Закон средней нормы прибыли выводится на основании стоимостей, и поэтому при дальнейшем уточнении, приняв во внимание цены производства, этот закон претерпел бы дальнейшее уточнение. Не вырешена например количественная сторона такого чрезвычайно сложного и трудного вопроса: каким образом при расширенном воспроизводстве будет распределяться общая стоимость. Ведь прибавочная стоимость распределяется в обоих подразделениях на три составные части. Это разбиение на слагаемые не случайно, соотношение этих частей не зависит от доброй воли, добродетели, бережливости и т. п. того или другого капиталиста, а зависит от структуры данного хозяйства, его технического, органического состава капитала и т. д. Какова тут закономерность? Когда попытаемся подойти к этому вопросу с точки зрения теории вероятностей, увидим, что он связан с проблемой математического ожидания частного, и в то же время, с другой стороны, с вопросом о разбиении суммы на слагаемые, со сложным вопросом аддитивной теории чисел, поскольку дело идет о всех возможных разбиениях совокупных для отдельных подразделений капиталистического общества стоимостей. Мы тут наталкиваемся на то, что при вычислении оптимумов, к которым здесь стремится каждое подразделение и которые отнюдь не приводят к увековечению капиталистической системы, перед математическим аппаратом стоит задача дать решения обычных квадратных уравнений с очень большим количеством членов. Так как требуется решение не в приближенном, а в алгебраическом виде, вы нигде не найдете трактовки этой проблемы.

Аналогично и в других вопросах возникает целый ряд новых проблем, которые может быть и не снятся нам и которые возникнут, когда подойдем к области экономики. Наконец вопрос о связи между математикой и экономикой и политикой должен ставиться нами не только в области развития самих наук. Он должен ставиться и в вопросе преподавания этих наук. Мы не можем дальше продолжать порядки буржуазных наук, где преподавание науки оторвано от прогресса самой науки, где наука прогрессирует, а преподавание в школе отстает на десятки лет от развития науки. Все эти вопросы непосредственно связаны с вопросом социалистического строительства. Математические науки мы должны продвинуть к экономистам, к тем, кто вынужден прибегать теперь к помощи специалистов по всякому пустяку, причем не в состоянии контролировать их.

Такое положение, когда наши статистики, экономисты, плановики, конъюнктурщики, финансисты и бухгалтера не смогут разобраться в верности математических формул, которыми они пользуются, в дальнейшем нетерпимо и должно измениться. Задача нашего математического общества—добиться того, чтобы это положение было изменено, чтобы учебные планы всех учреждений, всех институтов, всех наших учебных экономических заведений имели бы у себя математику и математическую статистику в достаточной пропорции, чтобы была поставлена подготовка и переподготовка преподавателей, которые могут внедрять там эту математику, и научных работников, которые могут давать правильное освещение использованию математики в этих науках. Совершенно особо следует подчеркнуть задачу широкой математической пропаганды в массах рабочих и колхозников, задачу, которую мы уже здесь ставили, но которая еще весьма далека даже от первоначального этапа своего решения.

Подводя итоги, можно сказать: математика прежде всего не составляет исключения по сравнению со всеми остальными науками, она, так же как и все остальные науки (общественные и естественные), должна быть у нас партийной наукой. Ведь не случайно, что такие люди, как Троцкий, говорили о том, что арифметика не знает партийности, что она не знает политики. Точно так же не случайно пытавшийся организоваться право-левацкий блок употребляет в своем арсенале борьбы против партии эту терминологию правильной арифметики, которая не знает ни правого, ни левого уклона, которая витает где-то в поднебесьи и всегда остается одинаково верной. Нет, партийность в математике, так же как и в философии, является безусловно обязательной. Математика теснейшим образом должна быть связана не только внешне, не только организационно, но всей своей структурой, всем своим содержанием с нашим социалистическим строительством, должна быть подчинена задачам социалистического строительства и не может быть оторвана ни от философии диалектического материализма, ни от политики нашей партии.

В. Хотимский

ПРОТИВ БУРЖУАЗНОЙ ЭКЛЕКТИКИ В СТАТИСТИКЕ[1]

(По поводу книги С. П. Боброва «Экономическая статистика»)

Каким бы сложным и тонким математическим аппаратом ни пользовался экономист при изучении конъюнктуры капиталистического хозяйства, он неизбежно придет к грубо ошибочным выводам, если не будет исходить из марксистской теории воспроизводства и кризисов. В этом отношении показательна известная работа Кондратьева «О больших циклах конъюнктуры», в которой ценой грубых искажений действительного хода экономического развития математически обосновывается незыблемость капитализма. Следует также упомянуть и работу Базарова «Капиталистические циклы и восстановительный процесс в СССР», в которой под фальшивым математическим нарядом выступает знаменитая «теория»... затухающих темпов.

Что же мы видим в работе Боброва? Есть ли в ней что-нибудь новое, положительное по сравнению с лженаучными методами буржуазной статистики?

С первых же шагов в разбираемой книге нас поражает трусливый эклектизм автора. С одной стороны, ему трудно скрыть свое восхищение мудростью английских махистов и американских эмпириков, а, с другой стороны, он спешит застраховать себя от вполне законного обвинения в пропаганде буржуазных теорий ссылками на Ленина и Маркса. С одной стороны, автор заявляет, что «методологические завоевания английской школы (махиста Пирсона *В. Х.*) дают чрезвычайно много для описания явлений, и что с их помощью именно материальный анализ только и может быть проведен достаточно широко» (стр. 109), а, с другой стороны, после подробного изложения чисто махистской теории кривых распределения он ограничивается кратким предостережением: «философские основания этих построений покоятся на зыбком фундаменте. Недаром Ленин называет Пирсона наивным философом» (стр. 117). Как будто автор не понимает, что «философские основания» здесь то же самое, что методологические, о которых несколькими страницами выше он писал, что «с их помощью... только и может быть проведен широко» материальный анализ. Ведь методология английской математико-статистической школы—это махистская философия в действии. Вряд ли это неизвестно Боброву.

Основное содержание разбираемой книги—математические приемы анализа конъюнктуры, применяемые американскими экономистами

[1] Напечатано в несколько сокращенном виде в «Правде».

во главе с известной школой Гарвардского университета. Эта школа обслуживает магнатов финансового капитала, пытаясь помочь им на основе предсказаний в критический момент использовать поворот конъюнктуры в своих интересах посредством банковских, биржевых и прочих операций. С этой целью гарвардцы исследуют целый ряд экономических кривых (фондов, цен, учетного процента и т. д.).

Основной порок всех этих исследований заключается в их чисто эмпирическом характере. Отсутствует самое существенное—знание истинных причин циклообразности конъюнктуры (подъем, кризис, депрессия), коренящихся в антагонистической структуре капиталистического хозяйства. Поэтому несмотря на огромную вычислительную работу, проделанную гарвардцами, они скользят по поверхности экономических процессов и занимаются практически бесплодным, случайным сопоставлением изменяющихся признаков. Еще совсем недавно гарвардская школа претендовала на предотвращение экономических кризисов в САСШ посредством удачных предсказаний «циклов». Однако переживаемый мировой кризис капиталистического хозяйства окончательно скомпрометировал гарвардские прогнозы и претензии.

У Боброва же в оценке гарвардцев получается какая-то неразбериха. Например на стр. 193 автор утверждает, что экономическое познание конъюнктуры «у американцев в минимуме». «Существо дела не задевается», противоречия капитализма замалчиваются, «для американских конъюнктуристов кризис—скорее не кризис, а поворотный пункт волнообразной кривой». А на стр. 195 дана прямо противоположная оценка. Персонс—глава гарвардцев—обладает «блестящим пониманием механизма экономических условий... Благодаря этому Персонс смог начать то, чем живет пока математическая статистика в экономике». И чем дальше, тем громче звучит хвала по адресу гарвардцев. Бобров говорит о «жизненности и широте» статистических построений Персонса, о том, что его работы превосходят все, что до сего времени написано на тему о кризисах. Персонс свел проблему кризисов «к ряду несложных и легко квантифицируемых положений... Персонс дал статистику в руки некоторые чрезвычайно простые методы изучения хозяйственных кривых, методы, проработанные много раз на превосходном американском материале».

Как примирить эту хвалебную аттестацию гарвардцев и рабское копирование их методов в условиях планового хозяйства с предыдущим утверждением о том, что «существо дела не задевается» и т. д.

Особенно запутан вопрос об устойчивости статистико-экономического ряда. Например на стр. 240 мы узнаем, что Персонс открыл постоянство лага, промежутка времени, отделяющего максимумы и минимумы одной кривой от максимумов и минимумов другой. Это открытие рассматривается как пример «динамической устойчивости», о чем сообщается в категорической форме. «Несмотря на то, что величина периода циклической кривой, а также и амплитуда колебаний претерпевали значительное изменение... лаг оставался постоянным». Подобными «эмпирическими закономерностями» Бобров предлагает пользоваться для экстраполяции конъюнктуры, т. е. в экономическом предвидении (стр. 242). А на стр. 302 неожиданно обнаружи-

вается, что сам Персонс отрекся от предсказаний на основе лага, «утверждая, что последний не является фиксированным»... И автор вынужден признать, что даже с точки зрения корректного эмпирического исследования «закономерности» Персонса «не считаются убедительными». Но тут же спешит извиниться перед мистером Персонсом за свою некорректность.

«Всепокрывающая заслуга Гарварда и в частности Уоррена Персонса в том, что исследователи сумели собрать, обработать массу поистине драгоценного материала и подняли вопрос антиципации. Эти вопросы поставлены Гарвардом во весь рост и проработаны в такой мере, что в настоящее время возможно уже строить более глубокий анализ. Без работ гарвардской школы это было бы неосуществимо» (стр. 303). А на всякий случай несколько страниц выше (296) припасена реабилитирующая цитата из Маркса. Казалось было бы «корректнее» сказать прямо—с кем автор. С гарвардскими фабрикантами «эмпирических закономерностей» или с марксистской критикой, показавшей, что за пресловутой устойчивостью скрывается буржуазная иллюзия вечности капитализма, и не проделывать всех этих «чисто циклических» колебаний.

Бобров приемлет даже теорию устойчивости Лексиса-Дормуа, одну из наиболее реакционных теорий буржуазной статистики. «Вполне возможно,—говорит Бобров,—что в дальнейшем эта теория окажется полезной и для временных рядов» (стр. 236).

Бобров пытается использовать авторитет Ленина для защиты теории устойчивости. С этой целью он цитирует известную ленинскую работу «К вопросу о диалектике» и пропускает именно ту часть цитаты, которая бьет как раз по теории устойчивости и пресловутым «эмпирическим закономерностям», открытым Персонсами и Громанами.

У Ленина:

Единство (совпадение, тождество, равнодействие) противоположностей условно, временно, преходяще, релятивно. Борьба взаимоисключающих противоположностей абсолютна, как абсолютно развитие движения... Для объективной диалектики в релятивном есть абсолютное.

У Боброва:

По вопросу об устойчивости соотносительной у Ленина: «Единство (совпадение, тождество, равнодействие) противоположностей условно, временно, преходяще, релятивно». Однако «для объективной диалектики в релятивном есть абсолютное».

Бобров пропускает мысль Ленина об абсолютности развития через борьбу противоположностей, направленную против всяких фетишей равновесия и устойчивости, и комбинирует так остальное, что у неискушенного читателя может получиться впечатление подчеркивания Лениным какого-то абсолютно-статического момента.

Спрашивается, как можно кормить подобной эклектической требухой наши кадры? Кто наконец отвечает за издание книги Боброва под маркой «Экономической библиотеки Госиздата»? Или быть может кое-кто полагает, что все равно—«товарищи все съедят»?

Э. Кольман

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ПРОЦЕССА КАПИТАЛИСТИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА, ВЗЯТОГО В ЦЕЛОМ [1]

1. **Методологические предпосылки.** Применение к политической экономии математического метода не только как метода изложения, но прежде всего как метода исследования, возможно лишь при условии, что этому применению предшествует социально-экономический анализ, настолько вскрывший качественные соотношения между экономическими категориями, что сложные взаимодействия приведены к достаточно простым, что предпосылки сформулированы достаточно отчетливо и что достигнута соизмеримость экономических величин. Математический анализ будет научным лишь в том случае, если предшествовавший ему качественный экономический анализ научен, если допущенные абстракции не разрушают основных черт капиталистической экономики, если в самый процесс применения математического анализа не привносятся посторонние качественные моменты. Применение математического метода становится необходимым там, где качественный анализ не в состоянии вывести достаточно специфизированные закономерности вследствие того, что соотношения усложняются на более близких к действительности ступенях абстракции. Как и вся политическая экономия, математический метод не ставит себе целью изучать практически измеримые величины или эмпирические законы; он в состоянии давать лишь количественное выражение обще-теоретическим закономерностям. Играя подчиненную, служебную роль, математический метод должен применяться в формах, наиболее целесообразно решающих данную экономическую проблему, и эффективность его применения будет ограничена эффективностью математических приемов.

2. **Анализ Маркса как основа количественного исследования.** Единственной политико-экономической теорией, сделавшей возможным научное применение математического метода, является марксистская политэкономия. Только здесь, исходя из социологической концепции пролетариата, как исключительно прогрессивного класса, взаимоотношения между экономическими категориями вскрыты до

[1] Автореферат доклада, прочитанного в кружке физиков-математиков-материалистов при Комакадемии 3 декабря 1928 г. и напечатанного в журнале «Социалистическое хозяйство», кн. 5, 1929 г.

конца, в теории трудовой стоимости обоснована возможность соизмеримости этих категорий. В своих простейших формах, отвечающих наиболее отдаленным от конкретного хозяйства ступеням абстракции, математический метод применяется самим Марксом (в форме линейных зависимостей например при выведении законов равновесия, закона падения нормы прибыли и т. д.). То, что выводимые закономерности, будучи по существу вероятностными, осуществляются лишь через непрерывные нарушения, не лишает их познавательной ценности и не может являться препятствием тому, чтобы, поднимаясь на следующую ступень абстракции, мы не искали присущих ей количественных закономерностей. Анализ Маркса движется от теории прибавочной стоимости к теории цен производства, причем последняя не отменяет, а лишь модифицирует первую. Дальнейшая ступень—это синтез теории цен производства и теории воспроизводства. Маркс при выведении средней нормы прибыли исходит из стоимостей, а из средней нормы прибыли (и издержек производства, выраженных в стоимостях) выводит цены производства.

«Между прибылью и прибавочной стоимостью не существует различия, поскольку прибавочная стоимость например капиталиста A входит в постоянный капитал B. Ведь для стоимости товара совершенно безразлично, состоит ли заключающийся в ней труд из оплаченного или неоплаченного труда. Это показывает только, что B уплачивает прибавочную стоимость A. В общем итоге прибавочную стоимость A не следует считать два раза.

Но разница заключается в следующем. Как мы уже знаем, цена продукта, произведенного например капиталом B, отклоняется от его стоимости, так как прибавочная стоимость, реализованная в B, может быть больше или меньше, чем прибыль, присоединенная к цене продуктов B; но то же самое обстоятельство снова сказывается по отношению к товарам, которые образуют постоянную часть капитала B, а косвенно—в качестве средств существования рабочих—и переменную его часть. Что касается постоянной части, то она сама равна издержкам производства плюс прибавочная стоимость, т. е. в данном случае равна издержкам производства плюс прибыль, а эта прибыль в свою очередь может быть больше или меньше, чем та прибавочная стоимость, место которой она заступает. Что касается переменного капитала, то хотя ежедневная заработная плата в среднем всегда равна новой стоимости, созданной в течение того количества часов, которое рабочий должен затратить для того, чтобы произвести необходимые средства существования, однако самое это количество часов фальсифицируется в свою очередь благодаря тому, что цены производства необходимых средств существования уклоняются от их стоимости. Все это разрешается однако благодаря тому, что в один товар прибавочной стоимости входит на столько больше, сколько ее недостает в другом, а следовательно уклонения от стоимости, заключающиеся в ценах производства товаров, взаимно уничтожаются. Вообще при капиталистическом производстве всякий общий закон осуществляется лишь как господствующая тенденция весьма запутанным и приблизительным образом, как некоторая средняя по-

стоянных колебаний, которая никогда не может быть точно установлена» [1].

Но фигурирующие при действительном образовании средней нормы прибыли компоненты капиталов выступают не в качестве стоимостей, а в качестве цен производства. Таким образом получается кажущийся порочный круг—главный козырь критики Бем-Баверка и др. Качественный анализ дает сокрушительную критику этой критики, показывая, что стоимость входит как сущность в цены производства и что последние могут быть выведены и поняты лишь на ее основе. Задача количественного анализа—вывести из заданных в стоимостях компонент капиталов и цены производства и среднюю норму прибыли, возникшую на их основании в процессе обращения.

3. **Синтез цен производства и теории воспроизводства.** На данной ступени абстракции принимаем, что 1) капиталистическое хозяйство существует в чистом виде; 2) его можно рассматривать как состоящее из двух подразделений: I—производство средств производства, II—производство средств потребления, причем пестроту внутренней структуры и процессы внутри каждого подразделения лишь предполагаем, но не рассматриваем особо; 3) можно абстрагироваться от денежного обращения и кредита; 4) от изменений в норме прибавочной стоимости; 5) от изменений в скоростях оборота; 6) от дохода; 7) от обесценения стоимости. Обозначим C постоянный, V переменный, $K=C+V$ авансированный капитал, M прибавочную стоимость, $T=K+M=C+V+M$ товарную стоимость. Обозначим цены производства тех же частей товара соответственно: c, v, $k=c+v$, m (прибыль), $t=k+m=c+v+m$. Величины без индексов будем относить к обществу в целом с индексом «1»—к I, с индексом «2»—ко II подразделению. Норму прибавочной стоимости обозначим через $A=\frac{M_1}{V_1}=\frac{M_2}{V_2}=\frac{M}{V}$, среднюю общественную норму прибыли, вычисленную из стоимостей обозначим $P=\frac{M}{K}$. Среднюю общественную норму прибыли, вычисленную из цен производства, обозначим p. Органический состав капиталов обозначим $Z_1=\frac{C_1}{V_1}$, $Z_2=\frac{C_2}{V_2}$, предполагая при этом, что $Z_1 \geqslant Z_2$. Таким образом получаем схему:

$$\begin{array}{c|l|l} \text{I} & T_1=C_1+V_1+M_1 & t_1=c_1+v_1+m_1 \\ \text{II} & T_2=C_2+V_2+M_2 & t_2=c_2+v_2+m_2 \\ \hline \Sigma & T=C+V+M & t=c+v+m \end{array} \qquad (1)$$

В то время как $P=\frac{M}{K} \neq \frac{M_1}{K_1} \neq \frac{M_2}{K_2}$ (за исключением частного случая, когда $Z_1=Z_2$), всегда будет $p=\frac{m}{k}=\frac{m_1}{k_1}=\frac{m_2}{k_2}$, или $m_1=pk_1=p(c_1+v_1)$, $m_2=pk_2=p(c_2+v_2)$, а отсюда из (1) следует:

$$\begin{aligned} t_1&=(1+p)(c_1+v_1) \\ t_2&=(1+p)(c_2+v_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

[1] Маркс, Капитал, т. III, ч. I, стр. 115, Гиз, 3-е изд.

Но так как при воспроизводстве оба подразделения должны сохранить в натуре соответствующие доли (постоянные и переменные капиталы) из всего произведенного капитала, то например постоянный капитал, произведенный в I подразделении, с общей стоимостью T_1 и с ценой производства t_1, должен в ценах производства распадаться на слагаемые в тех же пропорциях, как и в стоимостях. Поэтому будет:

$$e_1 : C_1 = t_1 : T_1, \quad c_2 : C_2 = t_1 : T_1. \tag{3}$$

Таким же образом и переменный капитал, произведенный во II подразделении, с общей стоимостью T_2 и с ценой производства t_2, должен в ценах производства распадаться в тех же пропорциях, как и в стоимости т. е.:

$$v_1 : V_1 = t_2 : T_2, \quad v_2 : V_2 = t_2 : T_2. \tag{4}$$

Отношения (3), (4) действительны как для простого, так и для расширенного воспроизводства. Для простого воспроизводства действительно кроме того еще $m_1 : M_1 = m_2 : M_2 = t_2 : T_2$, и таким образом из условий равновесия: $C = T_1$, $V = M = T_2$, следует, что

$$c = t_1, \; v + m = t_2.$$

Для расширенного воспроизводства, где прибавочная стоимость (и прибыль) распадается на три части: $M^c(m^c)$—накопляемую к постоянному, $M^v(m^v)$—накопляемую к переменному капиталу, $M^m(m^m)$—потребляемую капиталистами, так что

$$M^1 = M_c{}^1 + M_v{}^1 + \overset{m}{M_1}, \quad m_1 = m_c{}^1 + m_v{}^1 + \overset{m}{m_1},$$

$$M^2 = M_{c2} + M^2{}_v + \overset{m}{M_2}, \quad m_2 = m_c{}^2 + m_v{}^2 + \overset{m}{m_2},$$

имеем:

$$m_c{}^1 : M_c{}^1 = m_c{}^2 : M_c{}^2 = t_1 : T_1, \; m_v{}^1 : M_v{}^1 = \overset{m}{m_1} : \overset{m}{M_1} = m_v{}^2 : M_v{}^2 = \overset{m}{m_2} : \overset{m}{M_2} = t_2 : T_2,$$

откуда из условий равновесия $C + M^c = T_1 + V + M^v + M^m = T_2$, следует:

$$c + m^c = t_1, \qquad v + m^v + m^m = t_2.$$

Подставляя в уравнение (2) из уравнения (3), (4) $c_1 = \frac{C_1}{T_1} t_1$, $c_2 = \frac{V_2}{T_1} t_1$, $v_1 = \frac{V_1}{T_2} t_2$, $v_2 = \frac{V_2}{T_2} t_2$ получим:

$$t_1 = (1 + p)\left(\frac{C_2}{T_1} t_1 + \frac{V_1}{T_2} t_2\right),$$

$$t_2 = (1 + p)\left(\frac{C_2}{T_1} t_1 + \frac{V_2}{T_2} t_2\right), \tag{5}$$

откуда p вычисляется непосредственно:

$$\boxed{p = \frac{C_1 T_2 + V_2 T_1 - R}{2(C_1 V_2 - C_2 V_1)} - 1, \quad R = \sqrt{(C_1 T_2 + V_2 T_1)^2 - 4(C_1 V_2 - C_2 V_1) T_1 T_2}} \tag{6}$$

Между тем для вычисления t_1, t_2 уравнения (5) недостаточно, отсюда получается лишь $\frac{t_1}{t_2}$. Однако так как стоимости создаются лишь в процессе производства, а процесс обращения не создает и

не уничтожает, а лишь перераспределяет их, то имеет место уравнение

$$\boxed{t = T} \tag{7}$$

Из уравнений (5) и (7) получаем:

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &= \frac{T}{2} \cdot \frac{C_1 T_2 - (V + V_1) T_1 + R}{CT_2 - VT_1} \\ t_2 &= \frac{T}{2} \cdot \frac{(C + C_2) T_2 - V_2 T_1 - R}{CT_2 - VT_1} \end{aligned}} \tag{8}$$

Уравнение (7) не имеет энергетическое, а имеет стохастическое значение, являясь результатом процесса конкуренции. Если создадим «математическую модель» процесса реализации, то это уравнение может быть выведено как результат последовательного приближения. Представим этот процесс так, что оба подразделения выступают сначала стоимостями, образуют на их основании среднюю норму прибыли и на основании этой нормы—цены производства. Затем оба подразделения выступят только что определенными ценами производства, образуют на основании этих цен производства среднюю норму прибыли и на основании последней новые цены производства. Повторяя этот процесс, заметим, что он имеет предел, причем как на всех этапах приближения, так и в пределе сумма цен производства остается постоянной и равна сумме стоимостей, а предел средней нормы прибыли совпадает с вычисленным в уравнении (6). На самом деле, полагая в правых сторонах уравнений (5) сначала [1]

$$t_1^0 = T_1,\ t_2^0 = T_2,\ 1 + p^0 = \frac{T}{C + V},$$

получаем в левых сторонах

$$t_1^1 = \frac{T(C_1 + V_1)}{C + V},\quad t_2^1 = \frac{T(C_2 + V_2)}{C + V},$$

подставляя t_1^1, t_2^1, а также

$$1 + p_1 = \frac{t^1}{\frac{C}{T_1} t_1^1 + \frac{V}{T_2} t_2^1}$$

правые стороны уравнений (5), получаем t_1^2, t_2^2 и т. д. Для n-ого приближения получим таким образом;

$$\begin{aligned} t_1^n &= \frac{t_1^{n-1} + t_2^{n-1}}{\frac{C}{T_1} t_1^{n-1} + \frac{V}{T_2} t_2^{n-1}} \left(\frac{C_1}{T_1} t_1^{n-1} + \frac{V_1}{T_2} t_2^{n-1} \right), \\ t_2^n &= \frac{t_1^{n-1} + t_2^{n-1}}{\frac{C}{T_1} t_1^{n-1} + \frac{V}{T_2} t_2^{n-1}} \left(\frac{C_2}{T_1} t_1^{n-1} + \frac{V_2}{T_2} t_2^{n-1} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

[1] Верхние цифры—не показатели степени, а индексы.

а отсюда суммируя $t^n = t^{n-1}$, из чего следует, что $t = \lim t^n = t^\circ = T$, т. е. уравнение (7).

Вся задача может быть обобщена на случай, когда I подразделение состоит из α, II из β групп предприятий, отличающихся органическими составами капиталов. При этом способ последовательных приближений позволяет обойти трудности решения уравнения $\alpha + \beta$-й степени.

Далее, если обратно даны цены производства c_1, v_1, c_2, v_2 и A, сначала определим:

$$p = \frac{c_1 k_2 + (1 + A)\, v_2 k_1 + r}{2 k_1 k_2} - 1,$$

$$t_1 = (1 + p)\, k_1, \quad t_2 = (1 + p)\, k_2$$

$$r = \sqrt{[c_1 k_2 + (1 + A)\, v_2 k_1]^2 - 4 (1 + A)\, (c_1 v_2 - c_2 v_1)\, k_1 k_2}$$

и $T_1 = v_1 t_1 \dfrac{t}{v t_1 - (c_1 v_2 - c_2 v_2)}$, $T_2 = [v_2 t_1 - (c_1 v_2 - c_2 v_1)] \dfrac{t}{v t_1 - (c_1 v_2 - c_2 v_1)}$. (10)

У Маркса не только сумма цен производства равна сумме стоимостей, но и сумма прибылей равна сумме прибавочных стоимостей, что естественно, так как изменение в величине авансированных капиталов во внимание не принимается. На следующей ступени абстракции, где последнее учитывается вследствие того, что, благодаря разным органическим составам изменения не будут одинаковыми в обоих подразделениях, сумма прибылей в общем не равна сумме прибавочных стоимостей. Разность между общественной массой прибыли и общественной массой прибавочной стоимости уходит на увеличение (или уменьшение) компонентов капиталов сверх стоимостей при неэквивалентном обмене.

Качественное отличие между формулами Маркса и формулами, выведенными на основании синтеза цен производства и воспроизводства, наиболее наглядно видно, если выразить все величины через органические составы капиталов. Тогда по Марксу

$$P = \frac{AV}{(1 + Z_1)\, V_1 + (1 + Z_2)\, V_2},$$

между тем как

$$p = \frac{(1 + A + Z_2)\, Z_1 + 1 + A + Z_1 - Q}{2 (Z_1 - Z_2)} - 1,$$

где $Q \quad \sqrt{[(1 + A + Z_2)\, Z_1 - (1 + A + Z_1)]^2 - 4 (Z_1 - Z_2)\, (1 + A + Z_1)\, (1 + A + Z_2)}$.

Здесь P является функцией от A Z_1 Z_2 и $\dfrac{V_1}{V_2}$, в то время как p лишь функция от A Z_1 Z_2, и не зависит от распределения V на оба подразделения.

Количественные различия видны из следующих цифровых примеров (см. стр. 78).

Прим. 1. Простое воспроизводство

	C	V	K	M	T	m^1	t^1	
I	4 000	1 000	5 000	1 000	6 000	1 250	6 250	p=25,01%
II	2000	1 000	3 000	1 000	4 000	750	3 750	
Σ	6 000	2 000	8 000	2 000	10 000	2 000	10 000	

	c	v	k	m	t	
I	4 192	928	5 120	1 167	6 287	p=22,80%
II	2 096	928	3 024	689	3 713	
Σ	6 288	1 856	8 144	8 156	10 000	

Прим. 2. Расширенное воспроизводство

	C	V	K	M	T	m^1	t^1	
I	4 400	1 100	5 500	1 100	6 600	1 341	6 841	p=24,39%
II	1 800	900	2 700	900	3 600	659	3 359	
Σ	6 200	2 000	8 200	2 000	10 200	2 000	10 200	

	c	v	k	m	t	
I	4 584	1 105	5 599	1 278	6 877	p=22,80%
II	2 876	830	2 706	617	3 323	
Σ	6 460	1 845	8 305	1 895	10 200	

4. Дальнейшие задачи исследования. Исходя из нормы прибыли, выведенной на основании цен производства, мы имеем возможность поставить для расширенного воспроизводства вопрос о распределении прибылей m_1, m_2 на их составные части m_1^c, m_1^v, m_1^m, m_2^c, m_2^v, m_2^m. Это распределение, которое подвержено независящим от «воздержания» капиталистов закономерностям, определяется основным законом капитализма, законом накопления и антагонистичностью обоих подразделений.

Обозначим компоненты капиталов обоих подразделений для второго оборота, выраженные в стоимостях и в ценах производства:

$$\begin{aligned} \overline{T}_1 &= \overline{C}_1 + \overline{V}_1 + \overline{M}_1, \\ \overline{T}_2 &= \overline{C}_2 + \overline{V}_2 + \overline{M}_2, \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \overline{t}_1 &= \overline{c}_1 + \overline{v}_1 + \overline{m}_1, \\ \overline{t}_2 &= \overline{c}_2 + \overline{v}_2 + \overline{m}_2; \end{aligned} \right.$$

тогда будет иметь место:

$$\overline{C}_1 = C_1 + M_2^c, \quad \overline{V}_1 = V_1 + M_1^v, \quad \overline{C}_2 = C_2 + M_2^c, \quad \overline{V}_2 = V_2 + M_2^v,$$

между тем как аналогичные уравнения в ценах производства в общем случае неверны, ибо цены производства не образуются во взятых изолированно подразделениях, как результат взаимодействия этих подразделений.

Распределение прибавочной стоимости должно быть таким, чтобы прибыль второго оборота стала максимальной. Значит необходимо сделать максимумом выражение:

$$\overline{m} = \overline{t} - (\overline{c} + \overline{v}),$$

$$\overline{m} = \overline{T} - \left(t_1 \frac{\overline{C}}{\overline{T}} + t_2 \frac{\overline{V}}{\overline{T}} \right).$$

Выражая $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$ на основании формул (8), (6), преобразуем $\overline{m}$ сначала:

$$\overline{m} = \overline{T} - \frac{\overline{T}}{2(\overline{C}\overline{T}_2 - \overline{V}\overline{T}_1)\overline{T}_1\overline{T}_2} [C\overline{C}_1\overline{T}_2^2 - \overline{V}\overline{V}_2\overline{T}_1^2 - \overline{T}_1\overline{T}_2(\overline{C}\overline{V}_1 - \overline{V}\overline{C}_2) + (\overline{C}\overline{T}_2 - \overline{V}\overline{T}_1)\overline{R}],$$

и далее, так как

$$\overline{C}\overline{V}_1 - \overline{V}\overline{C}_2 = \overline{C}_1 V_1 - V_2 \overline{C}_2, \; C\overline{C}_1\overline{T}_2^2 - \overline{V}\overline{V}_2\overline{T}_1^2 - \overline{T}_1\overline{T}_2(\overline{C}_1\overline{V}_1 - \overline{V}_2\overline{C}_2) =$$

$$= \overline{C}_1\overline{T}_2(\overline{C}\overline{T}_2 - \overline{V}_1\overline{T}_1) - \overline{V}_2\overline{T}_1(\overline{V}\overline{T}_1 - \overline{C}_2\overline{T}_2) =$$

$$= \overline{C}\,\overline{T}_1^2\overline{T}_2^2 - \overline{V}_2^2\overline{T}_1^2 + (\overline{C}_1\overline{T}_2 + V_2T_1 \;\; \overline{C}_2\overline{T}_2 \;\; - \overline{V}_1\overline{T}_1) = (\overline{C}_1\overline{T}_2 + \overline{V}_2\overline{T}_1)(\overline{C}\overline{T}_2 - \overline{V}\overline{T}_1),$$

то наконец

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{m} = \overline{T} - \frac{\overline{T}(\overline{C}_1\overline{T}_2 + \overline{V}_2\overline{T}_1)}{2\overline{T}_1\overline{T}_2} - \frac{\overline{T}}{2\overline{T}_1\overline{T}_2}\overline{R}, \\ &\text{где} \\ &\overline{R} = \sqrt{(\overline{C}_1\overline{T}_2 + V_2\overline{T}_1)^2 - 4(\overline{C}_1\overline{V}_2 - \overline{C}_2\overline{V}_1)\overline{T}_1\overline{T}_2} \end{aligned}} \qquad (11)$$

к чему нужно добавить еще условие равновесия

$$\boxed{\overline{C} = T_1} \qquad (12)$$

А так как все переменные величины $\overline{C}_2$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}$ выражаются через переменные—C_1, $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ и постоянные A и T_1, то задача нахождения максимума m сводится к решению системы уравнений $\overline{m} =$

$\frac{\partial \overline{m}}{\partial \overline{C_1}} = \frac{\partial \overline{m}}{\partial \overline{V_1}} = \frac{\partial \overline{m}}{\partial \overline{V_2}} = 0$, а также к исследованию значений на краях интервалов, т. е. в следующих точках:

1) $C_1 = \overline{C_1}$, $\overline{V_1} = V_1$, $\overline{V_2} = V_2$;
2) $C_1 = \overline{C_1}$, $\overline{V_1} = (1 + A)V_1$, $\overline{V_2} = V_2$;
3) $\overline{C_1} = \overline{C_1} + AV_1$, $\overline{V_1} = V_1$, $\overline{V_2} = V_2$;
4) $C_1 = \overline{C_1}$, $\overline{V_1} = V_1$, $\overline{V_2} = (1 + A)V_2$;
5) $C_1 = \overline{C_1}$, $\overline{V_1} = (1 + A)V_1$, $\overline{V_2} = (1 + A)V_2$;
6) $\overline{C_1} = \overline{C_1} + AV_1$, $\overline{V_1} = V_1$, $\overline{V_2} = (1 + A)V_2$.

Установление закономерности распределения прибылей непосредственно должно привести к установлению движения средней общественной нормы прибыли и всех компонент капиталов, в том числе значит и к выведению закона народонаселения. Определение уровня падения средней нормы прибыли через n оборотов позволит поставить вопрос о наступлении момента кризиса в абстрактном хозяйстве.

Э. Кольман

О СИСТЕМЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СОВЕТСКОЙ ЭКОНОМИКИ[1]

Наши статистические и плановые органы применяют для оценки развития советской экономики систему показателей, которая дает возможность судить об изменениях в том или другом секторе, в той или другой отрасли нашего хозяйства чисто эмпирическим путем: сопоставлением абсолютных цифр, характеризующих эти отрасли, или цифр, отнесенных к какому-либо уровню (например довоенному).

В настоящей работе делается попытка обосновать другую систему показателей, именно такую, которая отображала бы внутренние процессы, лежащие в основе нашего экономического развития.

Наша экономика развивается через борьбу, сосуществование трех[2] секторов нашего хозяйства: обобществленного—социалистического и необобществленных—простого товарного и частно-капиталистического. Между этими тремя секторами происходят следующие процессы, которые в своей совокупности образуют весь процесс нашего экономического развития, рассматриваемый изнутри (не с точки зрения связей с мировым капиталистическим хозяйством).

Процесс 1. При содействии простого товарного сектора, через товарооборот, растет сектор социалистический.

Процесс 2. При содействии социалистического сектора, через товарооборот, растет простой товарный сектор.

Процесс 3. Из простого товарного сектора отделяются целые части и переходят в сектор социалистический (например кооперирование).

Процесс 4. Из социалистического сектора отделяются целые части и переходят в простой товарный сектор (например распад кооперации).

Процесс 5. При содействии частно-капиталистического сектора, через товарооборот, растет социалистический сектор.

Процесс 6. При содействии социалистического сектора, через товарооборот, растет частно-капиталистический сектор.

---

[1] Напечатано в № 10 журнала «Плановое Хозяйство» за 1928 г.

[2] Остальными двумя из пяти ленинских укладов в наших расчетах можно пренебречь: натуральным из-за его нетоварности, государственно-капиталистическим потому, что этот обособленный уклад (организационно-экономическое значение которого громадно) участвует своими фондами, прибылями и т. д. отчасти в социалистическом, отчасти в частно-капиталистическом секторах.

Процесс 7. Из частно-капиталистического сектора отделяются целые части и переходят в сектор социалистический (например национализация).

Процесс 8. Из социалистического сектора отделяются целые части и переходят в частно-капиталистический сектор (например денационализация).

Процесс 9. При содействии частно-капиталистического сектора, через товарооборот, растет простой товарный сектор.

Процесс 10. При содействии простого товарного сектора, через товарооборот, растет сектор частно-капиталистический.

Процесс 11. Из простого товарного сектора отделяются целые части и переходят в сектор частно-капиталистический (например окулачивание).

Процесс 12. Из частно-капиталистического сектора отделяются целые части и переходят в простой товарный сектор (например раскулачивание).

Измеряя каждый из секторов величиной вложенных основных фондов, мы в дальнейшем получим возможность охарактеризовать каждый из 12 процессов числовым показателем (своего рода «удельным весом» данного процесса) так, что совокупностью всех показателей будет характеризоваться для данного промежутка времени развитие всего хозяйства в целом.

Необходимо однако сделать следующие существенные замечания. Классоворазличная сущность отдельных секторов и их изменений, не являясь ни категорией политэкономии, ни величиной вообще, не выражена у нас совершенно. Качественные различия в составе секторов (в техническом и органическом составе, в концентрации капиталов, в ценообразовании и т. д.) лишь косвенно отражаются в количественных значениях показателей, которые также лишь косвенно отражают все социалистическое плановое начало (кредитную, налоговую системы, монополию внешней торговли и т. д.).

Переходя к количественным отношениям, условимся, что единицей измерения секторов будут вложенные в них капиталы (выраженные например в миллионах червонных рублей) и введем для секторов обозначения: A—социалистический; B—простой товарный; C—частно-капиталистический, понимая под A, B, C переменные значения величин этих секторов в какой-нибудь данный момент. Для того чтобы охарактеризовать описанные выше 12 процессов, введем следующие 12 показателей;

X_1 — количество единиц, создаваемых, согласно процессу 1, в единицу времени каждой единицей сектора B в секторе A;

X_2 — количество единиц, создаваемых, согласно процессу 2, в единицу времени каждой единицей сектора A в секторе B;,

X_3 — количество единиц, на которое, согласно процессу 3 в единицу времени каждая единица сектора B уменьшается и которое переходит в сектор A;

X_4 — количество единиц, на которое, согласно процессу 4, в единицу времени каждая единица сектора A уменьшается и которое переходит в сектор B;

Y_1 — количество единиц, создаваемых, согласно процессу 5, в единицу времени каждой единицей сектора C в секторе A;

Y_2 — количество единиц, создаваемых, согласно процессу 6, в единицу времени каждой единицей сектора A в секторе C;

Y_3 — количество единиц, на которое, согласно процессу 7, в единицу времени каждая единица сектора C уменьшается и которое переходит в сектор C;

Y_4 — количество единиц, на которое, согласно процессу 8, в единицу времени каждая единица сектора A уменьшается и которое переходит в сектор C;

Z_1 — количество единиц, создаваемых, согласно процессу 9, в единицу времени каждой единицей сектора C в секторе B;

Z_2 — количество единиц, создаваемых, согласно процессу 10, в единицу времени каждой единицей сектора B в секторе C;

Z_3 — количество единиц, на которое, согласно процессу 11, в единицу времени каждая единица сектора B уменьшается и которое переходит в сектор C;

Z_4 — количество единиц, на которое, согласно процессу 12, в единицу времени каждая единица сектора C уменьшается и которое переходит в сектор B.

Введенные нами 12 показателей X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 являются конечно в свою очередь также величинами переменными, отражающими, как уже сказано выше, как сознательные регулирующие воздействия нашей экономполитики, так и влияния рынка, через который секторы действуют взаимно друг на друга, из чего следует, что никакая экстраполяция не может помочь нам вывести отсюда законы общего развития.

После всего сказанного нетрудно составить уравнения, выражающие происходящие процессы. Обозначим ΔA, ΔB, ΔC изменения фондов соответствующих секторов в большой промежуток времени ΔT. Тогда ΔA будет складываться из следующих составных частей: от процесса 1 как увеличение на $X_1 B \Delta T$, от процесса 3 как увеличение на $X_3 B \Delta T$, от процесса 4 как уменьшение на $X_4 A \Delta T$, от процесса 5 как на увеличение на $Y_1 C \Delta T$, от процесса 7 как увеличение на $Y_3 C \Delta T$, от процесса 8 как на уменьшение на $Y_4 A \Delta T$. Все это взятое вместе даст:

$$\Delta A = (X_1 B + X_3 B - X_4 A + Y_1 C + Y_3 C - Y_4 A)\,\Delta T. \qquad (1)$$

Аналогично получим и ΔB: от процесса 2 как увеличение на $X_2 A \Delta T$, от процесса 3 как уменьшение на $X_3 B \Delta T$, от процесса 4 как увеличение на $X_4 A \Delta T$, от процесса 9 как увеличение на $Z_1 C \Delta T$, от процесса 11 как уменьшение на $Z_3 B \Delta T$, от процесса 12 как увеличение на $Z_4 C \Delta T$, а вместе:

$$\Delta B = (X_2 A - X_3 B + X_4 A + Z_1 C - Z_3 B + Z_4 C)\Delta T. \qquad (2)$$

Наконец тем же путем получим ΔC: от процесса 6, как увеличение на $Y_2 A \Delta T$, от процесса 7 как уменьшение на $Y_3 C T \Delta$, от процесса 8 как увеличение на $Y_4 A \Delta T$, от процесса 10 как увеличение

на $Z_2B\Delta T$, от процесса 11 как увеличение на $Z_3B\Delta T$, от процесса 12 как уменьшение на $Z_4C\Delta T$, а вместе:

$$\Delta C = (Y_2A - Y_3C + Y_4A + Z_2B + Z_3B - Z_4C)\Delta T. \quad (3)$$

Этим уравнениям можно придать более упрощенный вид, вводя вместо 12 начальных показателей 9 суммарных показателей:

$$x_1 = X_4 + Y_4,\ x_2 = X_1 + X_3,\ x_3 = Y_1 + Y_3;$$
$$y_1 = X_2 + X_4,\ y_2 = X_3 + Z_3,\ y_3 = Z_1 + Z_4;$$
$$z_1 = Y_2 + Y_4,\ z_2 = Z_2 + Z_3,\ z_3 = Z_3 + Y_4.$$

Эти суммарные показатели, которых вполне достаточно для описания и анализа приведенных процессов, могут быть определены (в отличие от начальных 12 показателей, для которых выведенных нами уравнений явно недостаточно) из наших уравнений без привлечения новых, добавочных уравнений. Эти показатели имеют следующие значения:

x_1—количество единиц, на которое, согласно процессам 4 и 8, в единицу времени каждая единица сектора A уменьшается и которое переходит в оба других сектора, взятых вместе;

x_2—количество единиц, на которое, согласно процессам 1 и 3, в единицу времени каждая единица сектора A увеличивается и которое отчасти создается сектором B через рынок, а отчасти переходит от него путем отделения;

x_3—количество единиц, на которое, согласно процессам 5 и 7, в единицу времени каждая единица сектора A увеличивается и которое отчасти создается сектором C через рынок, отчасти же переходит от него путем отделения;

y_1—количество единиц, на которое, согласно процессам 2 и 4, в единицу времени каждая единица сектора B увеличивается и которое отчасти создается сектором A через рынок, отчасти переходит от него путем отделения;

y_2—количество единиц, на которое, согласно процессам 3 и 11, в единицу времени каждая единица сектора B уменьшается и которое переходит в оба других сектора, взятых вместе;

y_3—количество единиц, на которое, согласно процессам 9 и 12, в единицу времени каждая единица сектора B увеличивается и которое отчасти создается сектором C через рынок, отчасти переходит от него путем отделения;

z_1—количество единиц, на которое, согласно процессам 6 и 8, в единицу времени каждая единица сектора C увеличивается и которое отчасти создается сектором A через рынок, отчасти переходит от него путем отделения;

z_2—количество единиц, на которое, согласно процессам 10 и 11, в единицу времени каждая единица сектора C увеличивается и которое отчасти создается сектором B через рынок, отчасти переходит от него путем отделения;

z_3—количество единиц, на которое, согласно процессам 7 и 12, в единицу времени каждая единица сектора C уменьшается и которое переходит в оба других сектора, взятых вместе.

Введением суммарных показателей уравнения (1), (2), (3) превращаются в следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \Delta A &= (-x_1 A + x_2 B + x_3 C).\Delta T \\ \Delta B &= (\ \ y_1 A - y_2 B + y_3 C).\Delta T \\ \Delta C &= (\ \ z_1 A + z_2 B - z_3 C).\Delta T \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Для небольшого промежутка времени ΔT (например одного квартала или одного хозяйственного года) искомые значения показателей $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ могут быть приняты постоянными и приравнены своим средним значениям за этот отрезок времени [1]. Если дальше принять, что в данный промежуток времени $\Delta T = T_2 - T_1$, величины A, B, C изменяются простейшим образом, т. е. линейно, тогда $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ превратятся в разности между конечными и начальными значениями величин A, B, C, т. е.

$$\Delta A = A^2 - A_1, \quad \Delta B = B_2 - B_1, \quad \Delta C = C_2 - C_1,$$

а выступающие в системе (1) значения A, B, C будут простыми арифметическими средними начальных и конечных значений, т. е.

$$A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2), \quad B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2), \quad C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2).$$

Таким образом система уравнений (I) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_2 - A_1}{T_2 - T_1} &= -\frac{A_1 + A_2}{2} x_1 + \frac{B_1 + B_2}{2} x_2 + \frac{C_1 + C_2}{2} x_3 \\ \frac{B_2 - B_1}{T_2 - T_1} &= \frac{A_1 + A_2}{2} y_1 - \frac{B_1 + B_2}{2} y_2 + \frac{C_1 + C_2}{2} y_3 \\ \frac{C_2 - C_1}{T_2 - T_1} &= \frac{A_1 + A_2}{2} z_1 + \frac{B_1 + B_2}{2} z_2 - \frac{C_1 + C_2}{2} z_3 \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Для того чтобы вычислить отсюда неизвестные значения показателей, нужно данный промежуток времени разбить на 3 или больше отрезков и составить для каждого отрезка нашу систему уравнений. Тогда для определения 9 неизвестных получим 9 или

---

[1] Полагая, что A, B, C меняются непрерывно, можем рассматривать систему (I) как систему линейных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами, общий интеграл которой будет:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 e^{r_1 T} + \beta_1 e^{r_2 T} + \gamma_1 e^{r_3 T}, \\ B &= \alpha_2 e^{r_1 T} + \beta_2 e^{r_2 T} + \gamma_2 e^{r_3 T}, \\ C &= \alpha_3 e^{r_1 T} + \beta_3 e^{r_2 T} + \gamma_2 e^{r_3 T}, \end{aligned}$$

где r_1, r_2, r_3 суть корни уравнения третьей степени:

$$\begin{vmatrix} -(x_1 + r) & x_2 & x_3 \\ y^1 & -(y_2 + r) & y_3 \\ z_1 & z_2 & -(z_3 + r) \end{vmatrix} = C,$$

и где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются из:

$$\begin{aligned} -(x_1 + r_1)\,\alpha_1 + x_2\,\alpha_2 + x_3\,\alpha_3 &= 0, \\ -(x_1 + r_2)\,\beta_1 + x_2\,\beta_2 + x_3\,\beta_3 &= 0, \\ -(x_1 + r_3)\,\gamma_1 + x_2\,\gamma_2 + x_3\,\gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

а также из начальных и конечных значений величин A, B, C.

больше уравнений, причем найденные значения будут конечно средними за весь разбитый на отрезки (например поквартально) срок.

Если все наше хозяйство будем рассматривать состоящим лишь из двух секторов: социалистического A и необобществленного $B+C=D$, тогда достигнем еще большего упрощения вычислений, понижая однако одновременно ценность системы показателей, могущей в таком случае служить лишь дополнением к системе $x_1 \ldots z_3$. В таком случае между секторами A, D будем различать следующие 4 процесса, из которых каждый охарактеризуем соответствующим показателем.

Процесс I. При содействии необобществленного сектора, через товарооборот, растет сектор социалистический; U_1 это количество единиц, создаваемых в единицу времени каждой единицей сектора D в секторе A.

Процесс II. При содействии социалистического сектора, через товарооборот, растет необобществленный сектор; U_2 это количество единиц, создаваемых в единицу времени каждой единицей сектора A в секторе D.

Процесс III. Из необобществленного сектора отделяются целые части и переходят в сектор социалистический; U_3 это количество единиц, на которое в единицу времени каждая единица сектора D уменьшается и которое (количество) переходит в сектор A.

Процесс IV. Из социалистического сектора отделяются целые части и переходят в необобществленный сектор; U_4 это количество единиц, на которое каждая единица сектора A уменьшается и которое переходит в сектор D.

Аналогично с предыдущим, составим систему уравнений, выражающих эти процессы:

$$\left.\begin{aligned} \Delta A &= (U_1 D + U_3 D - U_4 A)\ \Delta T \\ \Delta D &= (U_2 A - U_3 D + U_4 A)\ \Delta T \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Если [1] как и выше принять, что переменные A, D изменяются линейно, то для практического вычисления получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_2 - A_1}{T_2 - T_1} &= \frac{D_1 + D_2}{2}(U_1 + U_3) - \frac{A_1 + A_2}{2} U_4 \\ \frac{D_2 - D_1}{T_2 - T_1} &= \frac{A_1 + A_2}{2}(U_2 + U_4) - \frac{D_1 + D_2}{2} U_3 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(IV)}$$

[1] Если процессы рассматривать как непрерывные, точное решение системы (III) будет:

$$A = \varepsilon_1 e^{r_1 T} + \delta_1 e^{r_2 T},$$
$$D = \varepsilon_2 e^{r_1 T} + \delta_2 e^{r_2 T},$$

где r_1, r_2 суть корни квадратного уравнения:

$$\begin{vmatrix} r + U_4 & U_1 + U_3 \\ U_2 + U_4 & r + U_3 \end{vmatrix} = 0$$

и где ε_1, δ_1, ε_2, δ_2 определяются из:

$$\begin{aligned} (r_1 + U_4)\ \varepsilon_1 - (U_1 + U_3)\ \varepsilon_2 &= 0, \\ (U_2 + U_4)\ \delta_1 - (r_2 + U_3)\ \delta_2 &= 0, \end{aligned}$$

а также из начальных и конечных значений величин A, D.

причем показатели U_1, U_2, U_3, U_4 могут быть вычислены как средние значения путем разбивки данного промежутка времени на два или больше отрезков.

Ежегодные изменения совокупности показателей $x_1 \ldots z_3$ (а также дополнительных показателей $U_1 \ldots U_4$) дадут нам более глубокое понимание нашего хозяйственного развития, чем простое сопоставление контрольных цифр, дадут численное выражение темпу, с которым совершается рост каждого отдельного сектора, сдвиги в соотношениях между ними позволят нам не грубо эмпирически, а научно определить, какие из основных формирующих наше хозяйственное развитие процессов требуют путем вмешательства нашего социалистического планового начала усиления или ослабления и каковы требуемые размеры этих изменений.

С методологической точки зрения применяемый нами метод не имеет ничего общего с приемами математических ненаучных школ политэкономии и не является также механическим «по аналогии» перенесением в область экономики приемов, применяемых в естествознании. В то же время возможность применения математики к экономическим категориям, а также границы этого применения показаны на разбираемой нами проблеме с достаточной наглядностью. Приемы, выработанные физико-химией для изучения процессов подвижного равновесия, приемы, которые с успехом начинают применять и биологи (см. статью В. Вольтера «Математическая теория борьбы за существование» в томе 8/1 «Успехи физических наук», где приведены опытные данные, подтвердившие предвычисленное), эти приемы применимы и к экономическим явлениям подвижного равновесия, причем нет никакой необходимости «дополнять» марксову концепцию хотя бы такими натуралистическими допущениями о сущности рыночного обмена, которые делает В. Базаров в своей книге «Капиталистические циклы», допущениями, которые лишают эту работу научной ценности.

Однако для конкретного применения изложенного метода ни «Справочник ЦСУ», ни «Контрольные цифры Госплана» не дают достаточных данных, так как в них везде учитывается лишь обобществленный и необобществленный секторы, но нет разбивки необобществленного сектора на частнокапиталистическую и простую товарную части. Таким образом излагаемый нами метод настоятельно ставит перед нашими статистическими и планирующими органами задачу — пополнить этими важнейшими данными публикуемые таблицы, для чего окажется необходимым видоизменить методы учета прежде всего в крестьянском хозяйстве.

М. Выгодский

ПОНЯТИЕ ЧИСЛА В ЕГО РАЗВИТИИ [1]

1. Понятие числа принадлежит к основным понятиям математики, содержание которых нельзя раскрыть формальным определением—приемом, столь широко применяющимся в этой науке. Но содержание всякого понятия раскрывается не только при помощи его формального определения; более того, формальное определение играет лишь вспомогательную роль в процессе формирования понятия. Решающая и руководящая роль принадлежит опыту в широком смысле этого слова. Содержание опыта обусловливает в конечном счете содержание всех наших понятий. И если содержание «сложного» понятия раскрывается при помощи определения, то это возможно только потому, что в самих исходных «более простых» понятиях уже накоплено опытом богатое содержание. В силу этого мы обыкновенно не замечаем и того факта, что всякое новое «сложное» понятие не только формируется из «простых» понятий (как это представляется по схеме формального определения), но одновременно и обогащает содержание последних, подобно тому как присвоение капиталистом прибавочной стоимости не только обусловлено наличием капитала, но одновременно и способствует росту последнего.

Но если, анализируя «сложное» понятие, мы можем пройти мимо условий его образования, определяя его формально и не отдавая себе отчета во взаимоотношении определяющих (исходных) и определяемых понятий, то содержание понятий «первоначальных», «простых» (каковым является и понятие числа) не может быть раскрыто этим путем. Вот почему я сказал, что в «простоте» неопределяемых понятий лежит корень их «сложности». Ибо при раскрытии их содержания нельзя обойтись без раскрытия содержания того опыта, из которого они формируются.

А так как содержание опыта может подвергаться и действительно подвергается изменению, то и содержание понятия числа расширяется и обогащается. Поэтому ответить на вопрос, «что такое число», значит указать, каково содержание того опыта, из которого формируется понятие числа на различных ступенях своего развития; каковы те внешние изменения условий опыта, которые служат движущими силами этого развития; какие модификации вносят отдельные изменения условий опыта в определенные «числовые» абстракции; каковы внутренние

[1] «Естествознание и марксизм» № 2 за 1929 г.

взаимодействия этих абстракций, принимают ли они форму противоречий и, если да, то как эти противоречия разрешаются.

2. Исторически понятие числа возникло конечно из процесса счета. Вряд ли нужно распространяться о том, какую роль играет процесс счета даже в самых элементарных хозяйственных процессах. Гораздо важнее отметить, что процесс счета относится первоначально всегда к дискретным совокупностям, т. е. объектами счета являются отдельные, обособленные друг от друга предметы. Каждый из этих объектов является индивидуумом как в том смысле, что он является чем-то обособленным от других объектов (в этом смысле мы обычно и употребляем это слово), так и в буквальном, первоначальном смысле его, поскольку он неделим. Неделимость объекта нужно понимать конечно не в физическом смысле этого слова, а в биологическом, социологическом, техническом и т. д. смысле. Лошадь можно разрубить на-двое, но тогда она перестанет быть лошадью.

Когда ведется дискретный счет, «единица» этого счета определяется без всякого физического масштаба, и «равенство» двух чисел еще не есть физическое равенство: если мы например говорим, что *A* и *B* имеют равное число быков, это вовсе не значит, что вес полученного после убоя мяса будет одинаков. Единица счета—бык—определяется не каким-нибудь «физическим» признаком (вес, объем), а по признаку организации, в данном случае биологической; единицей счета является «целое», «неделимое», если угодно—«атом». Поэтому число на той ступени развития, на которой оно связано с процессом дискретного счета, есть «целое» число: 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. Так как развитая система нумерации появляется гораздо позднее, то «запас» чисел вначале бывает очень ограниченным и, естественно, не только записать (скажем, зарубками), но и назвать словами можно сравнительно немногие целые числа.

Мы не можем здесь заниматься вопросом о развитии техники счета, удобнейший инструмент которого человек находит у себя на руках—десять пальцев.

Укажем только, что сложение есть основная операция с «числами» (целыми числами); она является основной не только с исторической, но и с логической точки зрения; ознакомлением с этой операцией начинается всякое школьное обучение; эта операция является исходной и для теоретической арифметики.

3. Легко видеть, что на той ступени развития понятия о числе, которую мы исследуем, операция сложения чисел всегда выполнима, т. е. сумма двух «чисел» представляет всегда «число».

То же можно сказать и об операции умножения, которая на этой ступени есть не что иное, как сокращенное обозначение некоторых операций сложения (когда слагаемые равны между собой).

Оба эти действия—сложение и умножение—всегда возможны и дают всегда «точные» результаты, чуждые всякой приближенности. Это вытекает из

конкретного содержания понятия числа, которое по существу является точным числом (число быков в стаде точно равно 32, а не приблизительно 32). Но не следует забывать, что эта «абсолютная» точность возможна только благодаря «неточности», коренящейся в принципе счета, именно в том, что мы считаем равными числа, объекты которых лишены даже намека на физическое равенство.

Итак сложение и умножение всегда возможны и дают точные результаты; этого нельзя утверждать об обратных им действиях—вычитании и делении. Конечно «обратными» эти действия являются только для нас, т. е. только с логической стороны, исторически же это были несомненно самостоятельные действия, содержание и приемы которых вытекали из конкретных проблем. Так например, если я знаю (из прежнего подсчета), что у меня 35 стрел, то мне нет нужды заниматься снова подсчетом, чтобы узнать, сколько стрел осталось после того как две стрелы израсходованы. Я узнаю это, производя вычитание двух из тридцати пяти, и для меня это действие не является действием, обратным сложению, а имеет совершенно самостоятельное значение и конкретное содержание.

Итак действия вычитания и деления были вполне самостоятельными операциями, но всегда ли они возможны в пределах «целочисленного» опыта? Конечно нет. Одно из них—вычитание (большего числа из меньшего)—может явиться вовсе «невозможным», другое—деление—может явиться возможным лишь приближенно.

4. Но если в пределах «целочисленного» опыта деление является операцией не всегда выполнимой «точно», а вычитание иногда является операцией вовсе невыполнимой в силу своей бессодержательности, то естественно, что на данной ступени развития понятия числа не существует ни дробных, ни отрицательных чисел. Как те, так и другие являются продуктом дальнейшего развития. Здесь интересно мимоходом отметить яркий пример относительности критерия «простоты»: с формальной стороны понятие отрицательного числа проще понятия дробного числа, поскольку вычитание есть обращение сложения, которое проще умножения, обращением которого является деление. Однако история свидетельствует о том, что понятие дробного числа имеет многовековую давность, так что происхождение его теряется во тьме минувших тысячелетий, тогда как отрицательное число — продукт человеческой мысли ближайших к нам столетий, развитие которого можно проследить документально шаг за шагом.

Причина этому та, что понятие отрицательного числа может возникнуть и возникает на основе опыта, содержание которого неизмеримо богаче содержания сравнительного примитивного опыта, порождающего понятие дроби.

Обратимся поэтому к характеристике тех фактов опыта, которые формируют понятие дроби, т. е. делают возможным «невозможное» прежде деление. Как мы видели, эта невозможность имеет в своей основе индивидуальный характер объектов счета, их неделимость в том или ином смысле. Значит объективной предпосылкой сущест-

вования дроби является практическое отрицание индивидуальности объектов исчисления, хотя, как мы увидим, это отрицание носит очень ограничительный характер.

Если мы имеем дело с процессом дискретного счета, то условиями опыта дана единица счета (животное, стрела); деление есть операция, эквивалентная распределению «поровну». Иногда такое распределение неосуществимо, но иногда возможно и даже необходимо, но при этом происходит уничтожение индивида. Так, если четыре охотника убивают трех медведей, мясо которых служит им пищей, то необходимо разделить три на четыре. Результатом будет $^3/_4$. Но вероятно дележ произойдет не так, что три охотника от трех туш отделят часть, приблизительно равную $^3/_4$ туши, а оставшиеся куски получит четвертый—это значило бы предполагать слишком большой запас математических понятий у наших охотников. Дележ происходит так, что каждая туша делится на четыре примерно равные части и каждый участник дележа получает одну такую часть. Налицо исчезновение индивида—единицы счета (медведь), но вместе с тем появляется новая единица счета—четверть туши; мы видим, что отрицание индивидуальности носит действительно ограничительный характер: отрицается данная индивидуальность, но не индивидуальность вообще, существование которой в качестве единицы счета есть предпосылка исчисления. Таким образом развитие понятия числа совершается пока еще на почве процессов дискретного счета, по крайней мере до тех пор, пока «четверть» есть лишь одна из четырех частей целого, пока каким-либо, хотя бы грубым, измерением (веса или объема) не дан критерий физического равенства этих частей. А что в течение долгого времени этот критерий не входит в понятие дроби, доказывается и обычным доныне словоупотреблением: «бóльшая половина», «меньшая половина».

Мы видим таким образом, что понятие о «числе» (целом), возникшее из процесса счета дискретных предметов, развивается, расширяется на основе того же процесса дискретного счета. Становится возможным «невозможное» действие деления «старых» (целых) чисел. С появлением новых чисел (дробей) появляются и «действия» над ними: сложение, вычитание, а также умножение и деление на целое число. Что касается умножения и деления на дробь, то эти действия совершенно иного происхождения. Для процесса счета эти операции даже не «невозможны», а прямо «бессмысленны», бессодержательны. Если деление 19 на 6 на низшей ступени развития понятия о числе является «невозможным», оно тем не менее представляет вполне определенную, хотя и неразрешимую проблему. Требование разделить «поровну» 19 стрел между шестью охотниками совершенно ясно, но оно оказывается невыполнимым. Напротив, разделить число 19 на $3^1/_2$ «равных» части представляется бессмысленным, ибо число «равных» частей есть число целое!

С точки зрения процесса счета не может и возникнуть вопроса о делении (или умножении) 19 на $3^1/_2$; источником этого действия является принципиально другой процесс, процесс измерения.

5. Уже на ранних ступенях развития общества наряду со счетом дискретных объектов в сферу опыта входит измерение непрерывных величин: расстояний, площадей, объемов, веса, времени. Вероятно задача об измерении времени наиболее поздняя из всех перечисленных.

Из первых трех задач развилась геометрия как теоретическая наука. Зарождение ее лежит за пределами, доступными документально-историческому исследованию. Несомненно, что первыми инструментами для измерения длины были органы человеческого тела, на что указывают и названия многих мер длины: библейский «локоть», «фут»—по-английски нога, «пядь»—ладонь (расстояние между растопыренными пальцами руки), миля—тысяча шагов (mille passuum) и т. д.

Такие способы измерения долгое время были единственными. Естественно, что они не могли быть очень точны, но точность их соответствовала потребностям эпохи, ибо процесс измерения на первых ступенях своего развития совершенно уподобляется процессу дискретного счета.

При грубом измерении расстояния шагами достаточно учесть целое число шагов; при более точном измерении можно учитывать «полшага», может быть «четверть шага», но очевидно, что лишь простейшие дроби могут употребляться в процессе такого грубого измерения, подобно тому как это происходит и в процессе дискретного счета, когда части объекта (четверти туши) играют роль единицы счета.

Таким образом процесс измерения вначале не вносит существенных модификаций в содержание понятия числа. Но вот бо́льшие требования к точности измерения заставляют перейти от измерения шагами к измерению постоянным масштабом. Создаются меры длины, возникают подразделения этих мер на более мелкие. Введение твердых «неизменных» масштабов и представляет собой источник нового расширения понятия числа.

Прежде всего следует указать на то, что теперь должны входить в употребление дроби «более сложные», чем половина, треть или четверть. Если мера длины, скажем, фут, подразделяется на двенадцать более мелких единиц длины, то необходимо уметь вести счет такими дробями, как $^1/_{12}$, $^5/_{12}$, $^7/_{12}$ и т. д.

Далее понятие «равенства» приобретает новое содержание. Равными будут не всякие два твердых масштаба, а только совмещающиеся при наложении. Поэтому одна четверть есть уже не просто одна из четырех частей, на которые разделена единица, а такая часть, что четыре совмещающиеся с ней масштаба, будучи приложены друг к другу, совместятся с единицей длины.

Разумеется, совмещение двух масштабов производится со всей доступной мерой точности. Человек сознает, что эта точность не абсолютная, что точность возможного совмещения зависит от ряда причин, например от свойств материала, из которого изготовлен масштаб, но он на практике убеждается в том, что увеличение точности представляется всегда возможным. Так как задачей

теоретической науки, является получение наиболее общих результатов, то естественно люди приходят к понятию об абсолютно точном «геометрическом» равенстве длин, идеализируя факт неограниченной возможности увеличения точности физического равенства. Мы видим, что деятельность человека служит источником его абстракций. Как ни странным кажется то, что понятие точного равенства, которое практически никогда не осуществляется, вытекает из человеческой практики, однако это неоспоримый факт, ибо концепция точного, «абсолютного» равенства есть абстрактное выражение того, что, усовершенствуя свои орудия и методы, мы неограниченно уменьшаем погрешности приближенных равенств.

Но если мы приходим к концепции «точного» равенства, то вместе с тем мы приходим и к замене физических объектов геометрическими. Вместо тонкой нити мы воображаем линию без толщины. Только эта «идеальная» линия может быть «точно» разделена на n равных частей.

Это число n может быть произвольно большим: нет границ для деления линии на равные части.

Итак процесс измерения вносит в понятие числа, возникшее из процесса счета, следующие модификации: 1) новое содержание понятия равенства и 2) возможность неограниченной делимости числа. Вместе с тем содержание понятия числа обогащается и в том смысле, что операции умножения и деления на дроби приобретают вполне определенный смысл, вытекающий исторически из синтеза процессов счета и измерения.

Измерение площадей и объемов было, наряду с измерением длин, важнейшей практической задачей. У Геродота мы находим изложение предания о том, что геометрия зародилась в Египте под влиянием потребности в измерении площадей земельных участков. Во всяком случае простейшие приемы вычисления площадей восходят к седой древности. Квадратная единица, т. е. квадрат со стороной, равной единице длины, издавна служила мерой площадей. Если измерение длины и ширины прямоугольника давало 4 и 3; 8 и 5; 7 и 6 и т. д. единиц длины, то площадь прямоугольника исчислялась умножением 4×3; 8×5; 7×6 и т. д., т. е. находили 12, 40, 42 и т. д. квадратных единиц. В правильности такого исчисления убеждал процесс разбиения длины и ширины на равные части, который приводится и поныне в начальных учебниках арифметики.

Таким образом процесс умножения чисел тесно связывался с процессом измерения площадей. Но длина и ширина прямоугольника могут выражаться и дробными числами. Тогда, желая найти площадь прямоугольника, мы приходим к задаче об умножении дроби (длины) на дробь (ширину). Это действие из бессмысленного становится вполне определенным, и правила умножения дробей вытекают из конкретного смысла этой операции.

Точно так же обстоит дело и с делением дроби на дробь. Это действие решает задачу о нахождении длины прямоугольника по ширине и площади его.

6. Если понятие дробного числа обусловливается, как мы видели, потребностью деления (целого на части), то понятие числа отрицательного должно быть обусловлено потребностью вычитания (из меньшего числа большего). Но для дробного числа существование и характер его конкретного прообраза не вызывает никаких сомнений и затруднений, и связь абстракции дробного числа с практикой совершенно очевидна; иначе обстоит дело с числом отрицательным. В какой сфере практики могла впервые возникнуть потребность в вычитании из меньшего числа большего и в операциях над результатом подобного вычитания? Ответ на этот вопрос может дать только история математики, и она располагает для этого исчерпывающими документальными данными. Суммируя эти данные, мы могли бы ответ формулировать так: понятие отрицательного числа зарождается и проходит *первые* этапы своего развития на почве *теории решения уравнений*.

Здесь нужно отметить два момента: во-первых, операции, применяемые при решении уравнений, как например перенесение членов из одной части равенства в другую, умножение многочленов и т. д., могут быть сведены в стройную систему только с помощью введения отрицательных чисел; во-вторых, отрицательные числа «самопроизвольно» появляются и помимо желания вычисляющего в качестве корня заданного уравнения.

Конечно в этом втором случае представляется всегда возможность объявить уравнение неразрешимым, а условия задачи, из которых уравнение получено, не осуществимыми на практике. Так и рассуждали в течение долгого времени.

Но первое соображение оказалось сильнее той неприязни к отрицательным числам, которое долгое время разделяли даже крупнейшие математики. Еще тогда, когда термина «отрицательное число» или ему равнозначного еще нет и случай отрицательного корня уравнения истолковывается как невозможность уравнения, т. е. когда *понятие* отрицательного числа еще не сформировалось, мы можем констатировать зародыши этого понятия в характере алгебраических операций.

Так у Диофанта (II—III вв. н. э.) находим высказанное без доказательства правило умножения многочлена на многочлен: «меньше на меньше дает больше», т. е. минус на минус дает плюс; но перемножаемые члены рассматриваются не как отрицательные слагаемые, а как положительные вычитаемые.

Потребность в установлении понятия отрицательного числа как такового возрастает по мере развития алгебраической символики, и лишь после полного осознания роли последней к началу XVII в. создаются условия, необходимые для «эмансипации» отрицательных чисел.

Как мы видим, понятие отрицательного числа является продуктом «внутренней» потребности развития математического аппарата.

Этим отнюдь не умаляется однако роль опыта в формировании математических абстракций. Все дело в том, что механизм операций математики, возникших на основе практики и развивающихся на практической основе, нуждается в регулировании известными общими

принципами, без чего он не может выполнять и своих практических функций. Все то, что служит этой цели, обусловлено в конечном счете содержанием опыта, человеческой практики.

Однако, если абстракция отрицательного числа формируется «внутренними» потребностями математического аппарата, то отсюда отнюдь не следует невозможность или ненужность ее непосредственного конкретного истолкования. Напротив, такое истолкование не только обеспечивает большую «наглядность» и легкость усвоения абстракции, но и дает возможность более плодотворного ее использования в самом математическом аппарате.

Нет ничего удивительного в том, что стремление найти подобное истолкование не покидает сторонников признания отрицательного числа. Уже у Леонардо Фибоначчи (1225) мы находим попытку истолковать решение задачи о сумме, причитающейся некоторому лицу, в случае отрицательного корня уравнения, как долг этого лица. Такое же толкование дает индус Брамагупта (620 н. э.). Это толкование встречается у ряда других математиков в средние века и в эпоху Возрождения.

Историческая обусловленность этого толкования наличием развитой торговли очевидна, но было бы, по-моему, ошибочным искать в практике торговых операций источник возникновения понятия отрицательного числа. Это ясно хотя бы из того, что операция умножения отрицательного числа на отрицательное, столь существенная в алгебре, не может найти никакого истолкования, если под этими числами понимать долги или убытки. И действительно, среди различных «доказательств» известного «правила знаков», когда-либо дававшихся в математической литературе, нельзя найти ни одного, апеллирующего к «коммерческому» истолкованию отрицательных чисел.

Эти доказательства можно разбить по их типу на три группы:

a) алгебраическо-арифметические, вроде следующего: пусть нужно умножить 8—3 на 10—4; результат 30 заранее известен; три члена-произведения будут 80, —30, —32 (что плюс на минус дает минус—«очевидно»); чтобы в результате получить 30, необходимо приписать четвертому произведению $(-3)\times(-4)$ положительный знак;

b) «геометрическое доказательство», истолковывающее произведение чисел как площадь прямоугольника; оно переводит на язык фигур предыдущее рассуждение;

c) «логическое доказательство», впервые указанное кажется Рамусом (Scholae mathematicae, 1569), который лаконически формулирует его так: «Два отрицания составляют утверждение». Рамус впервые ввел в математическую литературу термин «отрицательное» число (numerus negativus), который удержался в ней до нашего времени. До того пользовались терминами: фиктивное, ложное, абсурдное и т. д. число (numeri ficti, falsi, absurdi).

Истолкование отрицательного числа как «долга» или «убытка» по-указанным причинам не могло, разумеется, удовлетворить математиков, но иного истолкования не было предложено никем до Жирара, связавшего (Invention nouvelle en l'algébre, 1629) положительные и отрицательные числа с прямолинейным движением во взаимно-противополож-

ных направлениях. Эта идея однако не сразу нашла себе применение. В аналитической геометрии, где она столь плодотворно применяется, она не была использована ее основоположниками Ферма и Декартом. В соответствии с этим Декарт, пользуясь отрицательными числами в чисто алгебраических вопросах, называет их «ложными числами» (nombres fausses, «Géometrie», III, 1637). Заслуживает замечания, что в эпоху Декарта находятся крупные математики, вовсе не признающие отрицательных чисел. Так, английский математик Гаррио («Artis analiticae praxis», 1631), рассматривая уравнение (третьей степени), не имеющее, по нашей терминологии, положительных корней, доказывает, что предположение о существовании корней его ведет к противоречию. Разумеется, это доказательство содержит petitio principii.

Справедливость требует отметить, что против отрицательных чисел возражения раздавались еще на рубеже XVIII и XIX вв., уже после того как в аналитической геометрии отрицательные числа сыграли колоссальную роль и демонстрировали свои неоценимые преимущества. В своей книге «Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitèsimal» (1797) Л. Карно (отец знаменитого физика, выдающийся математик и общественный деятель Великой французской революции) настаивает на фиктивности отрицательных чисел; тот же Карно в «Gèometrie de position» (1803) высказывается еще более резко, считая, что учение об операциях над отрицательными числами полно противоречий и что с его помощью можно притти к любому абсурду [1].

Поэтому Карно требует, чтобы геометрия отказалась от пользования «иероглифическим письмом анализа» ввиду его сомнительности и ненадежности.

7. Изложенное выше не оставляет сомнения в том, что историческое развитие понятия числа есть развитие в противоречиях. Теперь посмотрим, как обстоит дело со стороны логического содержания понятия числа.

Если мы поставим вопрос: возможно ли деление 19 : 6 или вопрос: возможно ли вычитание 2 — 5, то на эти вопросы нельзя ответить ни «да», ни «нет». Правильным ответом будет: «и да и нет». Другими словами, на вопрос — существует ли число 19 : 6 или число 2 — 5, ответить должно: и существует и не существует. Существует, если мы будем искать это число среди «чисел» в расширенном смысле этого понятия; не существует, если мы будем искать его среди «чисел», беря понятие числа в неразвитом виде.

Надеюсь, что после изложенного выше эта формулировка ответа является достаточно ясной.

Однако я ожидаю возражения читателя: могут сказать, что ответ, «и да и нет» вызван неопределенностью в постановке самого вопроса; что уточнением последнего мы сделали бы возможным ответ по формуле «да» или «нет». Если бы вопрос был поставлен прямо: существует ли

---

[1] Вот один из примеров, приводимых Карно:

$$-a = +a, \text{ ибо } -a = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a.$$

число 19 : 6 среди целых (дробных) чисел, то на этот вопрос последовал бы ответ: «нет» («да»).

Но это возражение носит чисто формальный характер.

Для человека, обученного считать с дробями, дроби есть такие же «числа», как и целое число. Различие между ними носит для него чисто количественный характер; для него дробь со знаменателем 1 есть целое число—и больше ничего. Для него самый вопрос: «возможно ли деление 19 : 6» допускает только один ответ: «конечно возможно». Но что ответит на этот вопрос ребенок, научившийся счету с целыми числами в пределах, скажем, первой сотни? Он ответит, что точное деление невозможно, возможно лишь «деление с остатком».

Но может ли научная постановка вопроса основываться на суждениях неразвитого детского ума?—слышу я возражение.

Основываться конечно не может и не должна, но наводящим звеном в критической оценке наших научных методов изучения процесса развития наших понятий (как в истории человечества, так и в жизни индивида) может и должна служить.

Посмотрим же, имеем ли мы здесь дело только со «слабостью» примитивного мышления или наличии ответа «да» и «нет» на одни и тот же вопрос обусловливается более глубокими причинами.

Если требуют, чтобы вопрос был формулирован так: существует ли число 19 : 6 среди дробных чисел (или среди целых чисел), то очевидно предполагают, что предварительно известно, что такое дробное (в отличие от целого) число. Если так, то поставленный вопрос совершенно уместен, и ответ на него «да» («нет») лишен всякой двузначности.

Но дело в том, что совершенно невозможно, чтобы понятие о дробном числе существовало до того, как возник в той или иной форме вопрос о делении 19 : 6. Мы ничего не знали бы о дробях, если бы в конкретных задачах, именно в задачах, связанных с процессом измерения, не возникало необходимости произвести «невозможное» действие. Итак понятие о дробном числе возникает лишь после того, как сделалось возможным деление 19 : 6, т. е. после того, как в конкретном процессе измерения мы взяли более мелкую единицу измерения, такую, что бы шесть этих мелких единиц дали старую, более крупную единицу измерения.

Если мы не забудем этого, если мы будем помнить, что самое существование понятия о дроби предполагает возможность «деления» 19 : 6 [1], тогда будет ясно, что формулировка вопроса: «существует ли среди дробных чисел число 19 : 6», равносильна такой постановке: «существует ли число 19 : 6, если оно существует», т. е. к простой тавтологии.

То, что сказано о делении, относится и к вычитанию. Разность 2—5 существует и не существует; существует при развитом понятии числа; не существует при неразвитом понятии

[1] Напоминаю, что и самый процесс деления получает новый смысл, когда он происходит в процессах измерения, а не дискретного счета.

числа. Вопрос: «существует ли число 2 — 5 среди отрицательных чисел» является чисто формальным и представляет по существу тавтологию.

Вычитание 2—5 и возможно и невозможно, и когда оно становится возможным, только тогда возникает понятие отрицательного числа.

Возможным же вычитание 2—5, как и деление 19 : 6, становится тогда, когда выполнение этого действия либо требуется непосредственно практикой, либо вызывается потребностями развития теории, создавшейся в конечном счете из потребностей практики. Первое имело место в случае деления; второе — как мы показали — имело место в случае вычитания.

Для нас существенно то, что не действие становится возможным благодаря саморазвитию понятия числа, а наоборот, понятие числа развивается благодаря потребности сделать возможным то или иное действие.

8. В исследованных нами вопросах синтез процесса счета и процесса измерения протекал, если так можно выразиться, сравнительно мирно и безболезненно. Результатом его является то, что объект измерения (например протяжение) получает определенную числовую характеристику. Именно на прямой линии мы различаем точки, соответствующие целым и дробным, положительным и отрицательным числам, после того как выбран масштаб (единица) и начало отсчета (нуль). «Безболезненность» синтеза характеризуется тем, что, расширяя понятие числа, мы легко усматриваем, где на «числовой прямой» располагаются дробные (в промежутках между целыми) и отрицательные числа (в противоположном направлении). Легкость «наглядного» усвоения маскирует противоречивые элементы понятия числа для человека, получающего современное математическое воспитание (что в сравнительно недавнем прошлом дело обстояло иначе — мы имели возможность убедиться).

Однако с тем большей ясностью выступает элемент противоречивости в другом пункте этого развития, к изложению которого мы переходим.

На числовой прямой, как мы сказали, можно указать точку, соответствующую любому целому, дробному, положительному и отрицательному числу. Двум различным числам соответствуют две различные точки. Разумеется, мы имеем в виду абстрактную, геометрическую прямую и на ней абстрактные, геометрические точки, ибо на конкретной «прямой» две очень близкие «точки» могут быть неразличимы. Так при масштабе 1 *см* точки 2,3345187 и 2,3345188 неразличимы, т. е. эти числа практически равны между собой, ибо в данных условиях всегда есть предельная возможность дробления единицы, всегда существует практическая «неделимость» отрезка. Но эти условия меняются, точность измерения увеличивается, и было бы нецелесообразно теоретически ограничивать возможность деления. Мы приходим таким образом к концепции неограниченной делимости прямой.

Насколько такая концепция отвечает действительности — другой вопрос, которого мы здесь касаться не можем. Во всяком случае она представляет идеализацию того факта, что точность наших измерений увеличивается непрестанно с усовершенствованием орудий и методов измерения. Вся геометрия зиждется на этой концепции и ей обязана своей пресловутой «точностью».

Итак на теоретической непрерывной прямой каждому числу соответствует точка. Более того, эти точки плотно заполняют прямую. Это утверждение означает, что нет такого отрезка прямой (как бы он ни был мал), на котором не существовало бы бесконечного множества числовых точек. Этот факт неразрывно связан с возможностью неограниченного деления отрезка.

Но если каждому «числу» соответствует — и притом точно, идеально соответствует — определенная точка и если эти точки плотно заполняют любой отрезок прямой, то можем ли мы утверждать, что каждой точке соответствует точно, идеально некоторое «число»?

Не сомневаюсь, что читатель, не искушенный в математических тонкостях, ответил бы на этот вопрос утвердительно. Во всяком случае неоспоримым историческим фактом является то, что в течение многих веков математика отвечала на этот вопрос: «да».

И действительно, ведь утверждая это, мы лишь идеализируем процесс измерения, который состоит в том, что мы выражаем измеряемую величину (длину) числом. Конечно на практике мы всегда имеем более или менее приближенное определение длины числом, но мы можем его уточнять неограниченно, усовершенствуя наши орудия и методы. Поэтому идеализировать этот факт, утверждая, что каждой точке точно соответствует число, мы можем с тем же правом, с каким мы утверждаем, что каждому числу соответствует определенная точка.

И если бы в синтезе процесса измерения и процесса счета, выражающемся в развитии понятия числа, не было элемента противоречия, то и утверждение, что каждой точке соответствует точное число, было бы совершенно неоспоримым и не вело бы к противоречиям.

До поры до времени так и происходит. В самом деле очевидно, что измерительная практика сама по себе не может вести к противоречию, поскольку мы в практике не имеем «геометрической» точности. Напротив, эта практика берет за основу в качестве исходного пункта возможность выражения протяжения числом. Теория только идеализирует эту возможность, приписывая ей идеальную точность, которой на практике никогда нет. Таким образом «голая» практика не может дать указания на то, возможно ли всякой точке отнести точное число, ибо она не имеет дела ни с точками, ни с точными числами.

Что касается теории, то в известных пределах она решает вопрос утвердительно. Например, если даны точными числами две точки, скажем, точка $+1^2/_7$ и точка $+2^4/_9$. Можно ли выразить точным числом точку, лежащую между ними на равных расстояниях от них? Эта точка может быть найдена чисто геометрически, циркулем и линейкой. От точности этих приборов, равно как и от точности нанесения точек

$+1^2/_7$ и $+2^4/_9$ зависит степень точности результата. Идеализированная искомая точка выразится точным числом: $\left(1\frac{2}{7}+2\frac{4}{9}\right):2=1\frac{109}{126}$.

Таким образом точное соответствие между точкой и числом зависит от возможности определенных действий над числами—в данном случае от возможности «точного» вычитания и деления дробей. Мы видели, что эти действия становятся возможными на определенной ступени развития понятия числа. Поэтому в данном случае точное выражение точки числом возможно. Проверяя результат измерением (в десятичной системе мер), мы нашли бы приближенный результат: 1,86 или 1,865 или 1,8651 и т. д.; все эти числа представляют приближенные значения числа $1\frac{109}{126}$; мы их можем найти и теоретически.

Из изложенного ясно, что пока теоретические условия задачи таковы, что требуют выполнения сложения, вычитания, умножения и деления («четырех действий арифметики»), нахождение точного числа, соответствующего данной точке, т. е. длине данного (теоретическими условиями) отрезка, всегда возможно.

Дело однако меняется, когда условия задачи требуют выполнения других действий, выходящих за пределы упомянутых четырех.

Остановим свое внимание на таком действии, как нахождение квадратного корня из данного «числа», т. е. на нахождении неизвестного числа, определяемого требованием, чтобы умноженное само на себя оно произвело данное число. Задача таким образом всегда имеет смысл; но всегда ли она возможна? Если данное число 4, 16, 25,..., то искомое число будет 2, 4, 5 (или -2, -4, -5), ибо $2\times2=-2\times-2=4$; $4\times4=-4\times-4=16$; $5\times5=-5\times-5=25$ и т. д. Но если данное число есть 2, то существует ли искомое число? Притом существует ли такое число как «точное»? Нетрудно видеть, что приближенно таким числом может служить 1,4 или, еще лучше, 1,41, ибо первое дает $1{,}4\times1{,}4=1{,}96$, а второе 1,9881, т. е. «почти» два. Но это нас так же не удовлетворяет, как не удовлетворяет нас возможность деления 19 : 6 «с остатком». Мы видели, что возможно и точное деление. Возможно ли точное извлечение квадратного корня? На поставленный вопрос нельзя ответить иначе как по формуле «и да и нет». Но если на вопрос о возможности точного деления вы склонны были дать только ответ «да», то на вопрос о возможности точного извлечения корня я ожидаю ответа «нет». Как выяснится в дальнейшем, существенная причина этого различия в ответах состоит в том, что в этом пункте вскрываются противоречивые элементы синтеза процесса счета с процессом измерения.

9. Давая ответ «нет» на поставленный вопрос о возможности точного извлечения квадратного корня из числа 2, мы руководствуемся следующими соображениями: среди целых чисел такого числа безусловно нет. Значит искомое число могло бы быть только неправильною дробью, лежащей между 1 и 2. Эту дробь всегда можно представить в несократимом виде, причем числитель и знаменатель будут целыми числами a и b. Если мы помножим на себя дробь $\frac{a}{b}$, то результат будет

$\frac{a \cdot a}{b \cdot b}$. Дробь $\frac{a \cdot a}{b \cdot b}$ нельзя сократить Значит ее нельзя представить в виде целого числа, а мы хотим получить целое число 2. Значит ни целым, ни дробным (положительным или отрицательным) числом $\sqrt{2}$ быть не может.

Что кроме известных нам «чисел» могут быть еще другие, среди которых нужно искать $\sqrt{2}$,—это соображение, если бы оно возникло, может быть отпарировано таким аргументом: где же искать эти числа? Ведь числовую прямую наши «числа» заполняют «плотно». А между тем, если такое число существует, то должно же оно помещаться на числовой прямой?

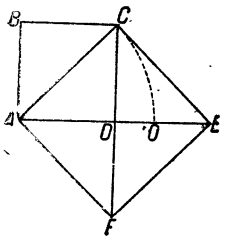
Ответ «числа $\sqrt{2}$ не существует» является безапелляционным, если мы рассматриваем вопрос в чисто арифметической постановке, когда процесс измерения в его идеализированной форме не привлекается к рассмотрению непосредственно; он участвует лишь косвенно, поскольку при его посредстве сформировалось наше понятие числа. Более того, этот ответ остается в полной силе, пока мы апеллируем к «числовой прямой», не обращая внимания на противоречивые элементы этого образа, наличие которых вызвано синтезом процессов счета и измерения. Именно этот синтез привел нас к тому, что единица, являвшаяся в процессе счета неделимым объектом, стала делимой, рассматраваемая как протяженный объект измерения (единица длины, времени, площади, объема и т. д.). Расширив понятие числа (введением дробей) мы представителями этих новых чисел взяли точки числовой прямой. Непротяженность точек является необходимым логическим следствием требования теоретической возможности точного и неограниченного деления. Однако именно эта непротяженность и является тем пунктом, где заложены корни противоречий, возникающих в дальнейшем развитии понятия числа. Эти противоречия дремали до тех пор, пока в поле нашего зрения были четыре операции арифметики, и вот почему: дробные числа возникли из процесса измерения протяженных величин; эти протяженные величины мы идеализировали, «сделав» их непрерывными; после этого мы «спокойно» оперировали над числами, производя над ними различные действия; но мы не обращались к изучению свойств самой протяженности, идеализированной нами. А между тем именно изучение этих свойств и приводит нас к обнаружению противоречивых элементов.

Утверждение: «не существует числа, квадрат которого в точности равен числу 2» вытекает, как мы видели, из того, что ни одно из чисел, полученных нами путем деления идеализированного отрезка, не удовлетворяет поставленному требованию. Если бы нас интересовали только арифметические операции сами по себе, то это утверждение было бы единственно правильным, как было бы правильным утверждение, что 5 нельзя разделить на 3 равные части, если бы мы имели в виду 5 объектов дискретного счета. Противоречие в этой последней задаче (5 делится на 3 равные части) явилось следствием

того, что в физическом опыте появились протяженные объекты измерения. Но, в противоположность этому, утверждение: «существует число, квадрат которого точно равен двум», никогда не может явиться результатом физического опыта, ибо в физическом опыте «точность» всегда относительная, а не абсолютная, так что при всяком состоянии измерительной техники нет возможности отличить физически число 2 от $2 \mp \varepsilon$, где величина ε меньше предела погрешности. Физический опыт может следовательно убедить нас в существовании числа, квадрат которого сколь угодно мало отличается от 2, но это ясно и из чисто математических соображений. Таким образом, казалось бы, отрицательный ответ остается в полной силе и тогда, когда мы обратились непосредственно к измерению протяженных величин.

И все же он приводит к противоречию, если мы обратимся к исследованию протяженных величин, какими мы их идеализировали (а мы видели, что идеализация эта была мотивирована соображениями вполне физического характера, а вовсе не является плодом нашей фантазии).

Построим квадрат $ABCD$ со стороной AB, равной единице (например 1 *см*); мы считаем, что такое построение выполняется точно (в абстракции конечно), совершенно подобно тому, как исходим из возможности точного деления на 2 при теоретическом пользовании дробью $\frac{1}{2}$, которую мы ведь считаем неравной числу $\frac{10\,000\,001}{20\,000\,000}$. Далее построим диагональ этого квадрата AC. Совершенно очевидно, что эта диагональ имеет абсолютно точную длину (мы остаемся все время в области наших абстракций). Эта длина должна выражаться числом (должна,—говорю я—потому, что понятие дробного числа возникло именно из этой предпосылки, и если отпадает она, то рушится та база, на которой построена возможность существования дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т. д.). Обозначим это число через x. Должна также выразиться числом и площадь квадрата $ACEF$, имеющего стороной своей линию AC. Это число будет очевидно x^2. Легко видеть, что площадь эта точно вдвое больше площади квадрата $ABCD$, ибо она состоит из четырех прямоугольных треугольников, каждый из которых равен треугольнику ACD, а площадь $ABCD$ состоит из двух таких же треугольников. Но площадь $ABCD \parallel 1 \cdot 1 = 1$ *см*^{2}. Значит площадь $ACEF = 2$ *см*^{2}.



Черт. 1

Итак получаем $x^2 = 2$, где x есть число, выражающее длину диагонали AC. Это число, как мы говорили, должно существовать. Значит должно существовать число, квадрат которого точно равен 2.

10. Итак налицо противоречие. Это противоречие — результат синтеза процессов счета и измерения. Оно не проявлялось прежде

потому, что мы рассматривали односторонне, чисто арифметически, операции над числами, оторвавшись от той геометрической (т. е. определенным образом идеализированной физической) базы, из которой родилось расширение понятия числа. Оно проявилось теперь, когда мы вернулись к этой базе, не предполагая в ней однако никаких новых качеств помимо тех, при посредстве которых наше понятие числа сформировалось (непрерывность прямой, непротяженность точек). В том, что появилось противоречие, нет ничего удивительного. Наоборот, было бы странным, если бы оно рано или поздно не возникло бы. Присмотримся теперь ближе к тому, где же лежит это противоречие.

Что ни одно из известных нам до этого чисел не дает в квадрате двух—это бесспорно. Значит есть еще какие-то числа нам неизвестные. При переходе от системы целых положительных чисел к дробным и отрицательным уже одно появление числовой прямой делает наглядным существование новых чисел — отрицательные числа лежали на продолжении прямой; дробные — в оставшихся пустых промежутках. Но теперь между числами пустых промежутков повидимому уже нет, ибо между всякими двумя числовыми точками A и B, согласно нашей системе абстракций, лежит бесчисленное множество других точек, делящих отрезок AB на 2, 3, 4 и т. д. равных частей. Это отсутствие пустот и мешает нам примириться с существованием новых чисел: для них как бы не находится места на прямой. Однако, описав циркулем (идеальным) дугу окружности с центром A (черт. 1) до ее пересечения с прямой AE, мы должны получить точку пересечения O, для которой значит найдется место на числовой прямой, хотя ее расстояние до точки A и равно $\sqrt{2}$.

Значит, несмотря на то, что на прямой AE дробночисленные точки не оставляют между собой пустот, все же они заполняют не всю прямую! Вот где корень противоречия.

И теперь мы видим, откуда оно вырастает: из характера тех абстракций, к которым нас привел синтез процессов счета и измерения. Именно, мы считаем точки непротяженными. И именно эта непротяженность влечет за собою то, что, несмотря на отсутствие пустот в промежутках между числами, все же остаются пустые места, т. е. пустые точки! Это было бы совершенно немыслимо, если точки были бы, скажем, кубиками; при отсутствии пустот, между кубиками нельзя было бы поместить внутри нового кубика. Таким образом лишь протяженность кубика мешает нам поместить его внутрь пространства без пустот. Ясно, что, считая точку непротяженной, мы не должны исключать для нее этой возможности. Если тем не менее мы не можем себе хорошо «представить» этой картины, то происходит это потому, что концепция точки имеет двустороннюю (и противоречивую) природу, отражая две противоречивые стороны физического бытия: с одной стороны, мы приходим к понятию точки, идеализируя возможность точного деления протяженности (точка как граница); с другой стороны, точка представляет идеальный образ безгранично уменьшающейся ве-

личины (отрезка) (материальная точка в механике). И так как при неограниченном уменьшении размеров кубиков все же остается в силе «непроницаемость» внутреннего пространства, как бы малы ни были кубики, то этой «непроницаемостью» обладают в нашем представлении и точки — предельные образы кубиков. Итак трудность примириться с существованием точного числа $\sqrt{2}$ вытекает из характера взаимной связи между точкой и прямой, связи, которая в самой себе содержит противоречивые элементы.

11. Мы проследили развитие понятия числа, начиная от простейшей его формы — целого числа (дискретный счет). Мы видели, как обогащается оно с введением дробей. Мы видели далее, что дроби становятся равноправными членами числовой семьи благодаря синтезу процессов счета и измерения. Мы констатировали противоречия, вытекающие из факта этого развития (деление 19 : 6 возможно и невозможно). Эти противоречия кажутся бледными и не бросаются сразу в глаза, они могут показаться надуманными: такова сила привычки, с одной стороны, и легкость наглядного представления дробных чисел — с другой. Однако эти противоречия становятся более яркими в свете противоречий более глубоких, разобранных нами в трех последних параграфах.

Мы поставили вопрос, всякой ли точке числовой прямой соответствует некоторое число? Ответить на этот вопрос «нет» значило бы отказаться от той неразрывной связи, которая существует между числом в его расширенном смысле и протяженной величиной — объектом измерения. Мы выразили уверенность в том, что читатель склонен будет — и с полным основанием — ответить утвердительно «да». С другой стороны, мы построили точку O, которой соответствует «число» $\sqrt{2}$; «но такого числа не существует», — ответил бы читатель с таким же основанием, если бы вопрос был поставлен чисто арифметически.

Если мы хотим «снять» это противоречие, то мы можем поступить двояко: во-первых, можно отрицать существование числа $\sqrt{2}$, считать извлечение квадратного корня из двух действием невозможным, т. е., другими словами, признать, что не всякой точке отвечает число (но всякому числу отвечает точка!). Это значило бы исключить возможность применения арифметики и алгебры к геометрии. Каким бы чудовищным ни казалось это пожертвование содержанием в пользу формы, но именно по этому пути пошла математика античного мира. В «Элементах» Евклида, в этом изумительном по выдержанности метода и целостности системы продукте творчества древних, по существу отсутствует измерительная геометрия. Было бы совершенно наивно предполагать, что древние греки не знали ее; мы можем с полной уверенностью утверждать, что познания греков в этой области были очень велики. Но считалось, что это область грубой практики, а не точной математической теории.

Уже один этот исторический факт свидетельствует о наличии глубокого противоречия, выход из которого в течение многих веков

находили лишь на пути формального отсечения противоречивых элементов концепции числа, лишь на пути игнорирования связи абстракций с конкретностью, лишь на пути отрыва теории от практики.

Но есть и другой путь, на котором стояли вероятно предшественники Евклида, по которому пошла, начиная с конца XV в., математика нового времени, когда исторические силы поставили в порядок дня вопросы связи между теорией и практикой. Этот выход сводится к признанию того, что каждой точке прямой отвечает некоторое число. Однако для точного представления такого числа, вообще говоря, недостаточно целых чисел и дробей. Так например $\sqrt{2}$ является числом таким же «точным», как $\sqrt{2{,}56}=1{,}6$, но в то время как $\sqrt{2{,}56}$ может быть выражен дробью 1,6 число $\sqrt{2}$ не может быть так представлено. В первом случае (когда возможно представление в виде дроби) число называется рациональным, во втором случае (когда точке не соответствует точное дробное число) — иррациональным.

Теперь мы можем, не разрывая связи между абстракциями и их конкретными прообразами, так формулировать ответ на вопрос — существует ли число, квадрат которого равен двум: «и существует и не существует: не существует среди рациональных, существует среди иррациональных чисел». Таким образом на вопрос о возможности извлечения квадратного корня из двух следует ответ по формуле «да — нет». Читатель сравнит этот ответ с данным выше ответом на вопрос о возможности деления и увидит аналогию в процессе синтеза на двух его различных ступенях. Подчеркну еще раз, что, «сняв» противоречивые элементы понятия числа, мы отнюдь не уничтожили их.

В самом деле, не следует думать, что говоря: «$\sqrt{2}$ не существует среди рациональных чисел и существует среди иррациональных», мы уничтожили двузначность ответа. Это было бы так, если бы при решении вопроса о существовании $\sqrt{2}$ мы располагали уже готовыми классами объектов (чисел), если бы мы «имели» числа рациональные и иррациональные и усмотрели бы, что $\sqrt{2}$ есть между иррациональными и отсутствует между рациональными числами. Но этого нет на самом деле; напротив, в существовании иррациональных чисел мы убеждаемся лишь после того, как вынуждаемся признать $\sqrt{2}$ числом, вопреки тому, что он им не является! Словом, мы лишь по видимости избавляемся от противоречия; на самом же деле мы лишь сдвигаем это противоречие, апеллируя к существованию «несуществующих» иррациональных чисел.

В подтверждение последнего вывода мы можем вновь сослаться на исторические факты. Как было сказано, математика нового времени ввела иррациональные числа в качестве равноправных членов числовой семьи. Это было сделано под давлением внешней необходимости — необходимости развития геометрической теории в соответствии с требованиями, предъявлявшимися ей «извне». Но уже в первой половине

XIX в. математики стремятся освободиться от этого «досадного» факта нарушения формальной логики. Одновременно и независимо друг от друга появляются теории иррациональных чисел, авторы которых стремятся о п р е д е л и т ь понятие иррационального числа чисто арифметически, не прибегая к фактам геометрии.

Здесь не место излагать эти теории. Их можно найти в любом «солидном» курсе анализа. Укажу только на два обстоятельства: в о - п е р в ы х, все эти теории носят чисто формальный характер; авторы «условливаются» называть иррациональными числами то-то и то-то. Из этого вытекает, с одной стороны, необходимость вводить затем а к с и о м у о том, что всякой точке соответствует число, аксиому, необходимость которой никак не вытекает из способа определения иррационального числа; с другой стороны, нарушается равноправие в числовой семье: числа 1, 2, 3, 4 и т. д. предполагаются данными без всякого определения (и это обосновывается философскими соображениями), числа рациональные (дробные) получают формальное определение как «пары целых чисел» (числитель и знаменатель); числа же иррациональные определяются совершенно отличным способом [1], предполагающим бесконечные процессы. Между тем для г е о м е т р и и все точки прямой как целые, так и дробные, как рациональные, так и иррациональные, совершенно равноправны.

В о - в т о р ы х (в настоящее время это можно утверждать с уверенностью), эти теории, стремясь формально-логически изгнать противоречия из учения о числе, несмотря на гениальную тонкость их построения, не дали того, ради чего они строились, т. е. не добились все же устранения противоречий, которые всплыли на поверхность в дальнейшем развитии теории и которые дали повод к ожесточенным нападкам крупнейших современных математиков на логические основы этих теорий; «новый кризис основ математики» — так характеризует это явление Вейль.

В нашу задачу не входит ни изложение классических теорий (изучение которых представляет не только с исторической, но и с методологической точки зрения громадный интерес и пользу), ни изложение их критики. Мы постараемся лишь несколько глубже заглянуть в п р и р о д у п о н я т и я и р р а ц и о н а л ь н о г о ч и с л а, оставляя пока открытым вопрос о том, нуждается ли это понятие в формализации, и если да, то какой характер эта формализация должна носить.

12. Под вещественными числами разумеют обычно совокупность чисел рациональных и иррациональных. Это определение или ему эквивалентное мы находим у всех современных авторов [2]. Таким образом в понятии вещественного числа объединяются два понятия:

---

[1] Как последовательности рациональных чисел (Кантор), как «сечения» в области рациональных чисел (Дедекинд) и т. д.

[2] Как видно из последующего, я считаю понятие вещественного числа вполне «законной» абстракцией; другой вопрос, насколько правомерным является пользование этим понятием, если определить иррациональное число как сечение в области рациональных чисел. Исследование этого вопроса потребовало бы изложения и критики современной теории иррациональных чисел.

числа рационального и числа иррационального. Но для того чтобы иметь основание для такого объединения двух понятий, необходимо, чтобы существовали какие-то черты сходства между ними. Между тем мы до сих пор обращали внимание, напротив, на черты различия между ними (рациональное число может быть точно выражено помощью арифметических операций над целыми числами; иррациональное число не может). Какие же черты общи для них? Прежде всего то, что оба они дают некоторую точку на числовой прямой. Значит мы могли бы сказать, что вещественное число всегда является представителем некоторой точки — это есть положительный признак вещественности числа. Но так как любой отрезок, включающий данную точку, содержит всегда рациональные точки, то в любой близости от данной точки существуют точки рациональные. Значит для всякого вещественного числа можно указать рациональное число, разнящееся от него «как угодно мало», т. е. меньше, чем на любую наперед заданную величину. Например можно указать рациональное число, отличающееся от $\sqrt{2}$ меньше, чем на 0,1; это будет 1,4 (приближение с недостатком) или 1,5 (приближение с избытком). Если потребуется найти рациональное число, разнящееся от $\sqrt{2}$ меньше, чем на 0,01; 0,001 и т. д., то всегда можно будет удовлетворить этому требованию, и притом бесконечным числом способов: так наравне с числом 1,41 и 1,42 числа 1,418; 1,413; $1\frac{83}{200}$ — словом, бесчисленное множество рациональных чисел, находящихся между 1,41 и 1,42 — разнятся от $\sqrt{2}$ меньше, чем на 0,1.

Итак общим свойством вещественного числа является возможность найти рациональное число, отличающееся от него сколь угодно мало. Что это свойство — общее для рациональных и иррациональных чисел, легко видеть из такого простого примера: для рационального числа $\frac{1}{3}$ можно найти (избыточные) числа $\frac{31}{90}, \frac{301}{900}, \frac{3001}{9000}$, отличающиеся от него на $\frac{1}{90}, \frac{1}{900}, \frac{1}{9000}$ и т. д., или (недостаточные) числа 0,3; 0,33; 0,333 и т. д., отличающиеся от него на $\frac{1}{30}, \frac{1}{300}, \frac{1}{3000}$ и т. д.

Это-то свойство и характеризует вещественное число арифметически. Если это свойство не выполняется, то нет и вещественного числа. Например $\sqrt{-1}$ не есть вещественное число. В самом деле, нельзя найти не только такое рациональное число, квадрат которого равен — 1, но и таких рациональных чисел, квадраты которых неограниченно приближались бы к — 1, квадраты всех рациональных чисел положительны, и значит квадрат, ближайший к — 1, есть нуль; следовательно возвышением рациональных чисел в квадрат мы не можем подойти к числу — 1 на расстояние, меньшее единицы.

Указанное характеристическое свойство вещественного числа представляет собой логический эквивалент конкретных свойств

объектов измерения. В самом деле, если процесс дискретного счета приводит, по крайней мере принципиально, к окончательному результату и фиксирует некоторое число (например число людей в комнате или число молекул в данном количестве вещества в данный момент времени), то процесс измерения ни теоретически, ни тем более практически не может на это претендовать. Измеряя например вес предмета на лавочных весах, мы найдем, скажем, 123 *г*. Но это никоим образом не есть точный вес предмета, ибо, положив на одну из чашек весов вес в 0,1 *г*, мы не нарушим равновесия — наши весы мало чувствительны. Аптекарские весы, реагирующие на нагрузку в 0,1 *г*, покажут, может быть, 123,4 *г*, но не будут реагировать на изменение в нагрузке одной из чашек на 0,01 *г*; химические весы дадут, скажем, 123,392 *г* и т. д. Уточняя приборы, мы будем получать все более точные приближения к действительному весу предмета. Можно ли увеличивать точность измерения *безгранично* или физическая структура материи такова, что безграничное дробление ее невозможно,— это вопрос другой, но во всяком случае мы идеализируем наши последовательные уточнения, говоря, что определение веса, длины, промежутка времени и т. д. возможно с любой степенью точности [1]. *При таком допущении* математическое понятие вещественного числа есть логический эквивалент *физической величины*, ибо всякая физическая величина, подобно вещественному числу, может быть с любой степенью приближения выражена *рациональным* числом (при соответствующем выборе единицы меры).

Но если вещественное число может быть рациональным или иррациональным, то можно ли найти в природе физических величин основание для аналогичного различения? Применим ли критерий рациональности или иррациональности к объектам действительного мира?

Если мы говорим, что последовательность

$$0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111 \text{ и т. д.}$$

определяет *рациональное* число $^1/_9$ в том смысле, что члены последовательности дают его неограниченные приближения, то мы можем сказать это лишь потому, что задан *закон* образования последовательности. Таким образом существование закона, если, может быть, и недостаточно, то во всяком случае необходимо для суждения о том, рационально ли число, определяемое последовательностью своих приближений. Но ясно, что последовательность результатов уточняющихся измерений, если и допустить возможность неограниченного возрастания числа ее членов, не может быть подчинена такому «закону». *Корень этой невозможности лежит в том, что физическое измерение имеет дело*

[1] Такое допущение представляет односторонний подход к явлениям природы, ибо игнорирует элемент прерывности, неразрывно связанной с непрерывностью. Но понятия математики не претендуют на *полную* адэкватность действительности. В этом их слабость, но одновременно и сила. Во всяком случае необходимо осознать, какие стороны явлений и вещей отражаются и какие игнорируются теми или иными абстракциями для того, чтобы судить о степени и границах применимости этих абстракций к явлениям внешнего мира.

с единичным объектом, тогда как в понятии математической величины мы как раз от этой единичности абстрагируемся. Если таким образом критерий рациональности и иррациональности, строго говоря, к физическим величинам не применим, то в известном смысле можно все же высказать парадоксальное на первый взгляд утверждение: физическая величина есть величина всегда иррациональная.

В самом деле, рациональное число выделяется из вещественных чисел тем признаком, что оно не нуждается в выражении путем последовательных приближений (хотя и может быть задано бесконечной последовательностью). Физическая же величина, подобно числу иррациональному, существенно нуждается в последовательном (безграничном теоретически) ряде уточняющихся приближенных измерений.

Таким образом иррациональное число, самое существование которого способно вызвать (и действительно долгое время вызывало) возражения, оказывается в указанном смысле более соответствующим природе объектов, чем число рациональное.

Более того, можно утверждать, что и математические величины «вообще говоря» выражаются числом иррациональным!

Возьмем такой пример. Даны катеты $AB = c$ и $AC = b$ прямоугольного треугольника. Тогда гипотенуза a определится так:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Задайте произвольные числовые данные для b и c, возьмите хотя бы только самые «простые» целочисленные их значения. Число окажется иррациональным. Можно получить и рациональное число a, но для этого нужно специально «подбирать» числа b и c (например $b = 3$, $c = 4$).

Еще хуже обстоит дело с определением острого угла треугольника ABC, например угла C, скажем, в градусной мере. Если $b = c$, то угол $C = 45°$, если $\frac{c}{b} = \sqrt{3}$, то угол $C = 60°$; но если взять «наугад» отношение $\frac{b}{c}$, то выразить угол C в градусной мере рационально не удастся. Но его можно определить вычислением с любой степенью точности. Значит искомое число—вещественное (что очевидно и непосредственно). Скорее всего—оно иррациональное. Я говорю «скорее всего», ибо—увы—не существует никакого общего критерия, чтобы узнать—является ли число рациональным или нет. Есть все основания сомневаться в том, что вообще возможно даже в каждом отдельном случае дать определенный ответ на этот вопрос. Если эти сомнения справедливы, тогда классификация вещественных чисел на рациональные и иррациональные обречена на неполноту и теряет характер научного принципа.

Но во всяком случае практически для нахождения вещественных чисел (градусной меры угла в нашем примере) мы располагаем, вообще говоря, только одним методом—нахождения бесконечной последовательности приближений. Поэтому и математическая величина в указанном выше смысле выражается, вообще говоря, иррациональным числом.

13. Анализ понятия вещественного числа вообще, а иррационального в особенности, приводит нас к новой проблеме. Вещественное число, будучи само к о н е ч н ы м, тесно связано с б е с к о н е ч н ы м процессом последовательных приближений.

Этот момент синтеза конечного и бесконечного в понятии вещественного числа представляет не только теоретико-познавательный, но и громадной важности практический интерес.

Если бы мы не обратили внимание на то, что число, квадрат которого равен двум, представляет не только процесс нахождения чисел, квадраты которых приближаются неограниченно к числу 2, но и з а к о н ч е н н ы й (я подчеркиваю) р е з у л ь т а т этого процесса, мы лишены были бы возможности получить ряд ценных выводов или, во всяком случае, получить их прямым путем.

Поясним сказанное примером: даны два вещественных (иррациональных) числа: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$. Найти их произведение. Можно рассуждать так: возьмем последовательные приближения этих чисел, полученные приближенным извлечением квадратных корней, например 1,4; 1,41; 1,414 и т. д. для $\sqrt{2}$ и 2,8; 2,82; 2,828 для $\sqrt{8}$, будем их перемножать: произведения $1{,}4\times 2{,}8=3{,}92$; $1{,}41\times 2{,}82=3{,}976$; $1{,}414\times 2{,}828=3{,}998792$ дают последовательные приближения искомого вещественного числа $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$. Последнее является пределом этой последовательности. Можно усмотреть, что числа последовательности приближаются к числу 4, но неограниченно ли приближаются? Или, быть может, они приближаются к числу 3,9999?

Ответить на этот вопрос, изучая последовательности, очень трудно. Однако легко д о к а з а т ь, что пределом служит 4, оперируя не с последовательностями, а с самими «законченными» числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$. Именно, я пишу следующий ряд равенств: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2}\cdot 8=\sqrt{16}=4$.

Этот результат можно истолковать геометрически.

Даны квадраты *ABCD* и *DEOH* (черт. 2), стороны которых 1 и 2. Найти площадь прямоугольника, сторонами которого являются диагонали этих квадратов (измеряемые числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$). Этот прямоугольник на чертеже обозначен *BKOD*. Легко видеть, что площадь его в точности равна площади квадрата *ABCD*, ибо, проведя диагональ *AC*, мы разобьем этот квадрат на четыре равных треугольника, каждый из которых равен каждому из треугольников *BKC*, *BCM*, *CMD* и *CDO*, составляющих вместе прямоугольник *BKOD*. Но площадь квадрата *ABCD* равна $2\times 2=4$.

Итак, вещественное число нужно рассматривать не только как бесконечный процесс построения его приближений, но и как результат этого процесса; выражаясь терминами философии—не только в его становлении, но и в его бытии.

Мы видим, что синтез конечного и бесконечного (конечный результат—бесконечный процесс) не только характеризует принципиальную сторону развития понятия числа, но, будучи применяем как метод исследования, дает практические результаты.

Проблема этого синтеза заслуживает более глубокого изучения, но я ограничусь сказанным, так как исчерпывающее изложение целого ряда вопросов, связанных с этой проблемой, может послужить темой для специальной работы.

14. Конкретный материал, относящийся к теме этой статьи, поистине неисчерпаем; с другой стороны, на разобранных мною вопросах, мне кажется, достаточно выявлена точка зрения автора. Мы могли бы закончить здесь нашу беседу; но наше изложение было бы неполно, если бы мы не завершили обзора элементарных числовых операций. Вне поля нашего зрения остался вопрос об извлечении квадратного корня из отрицательного числа. Остановимся вкратце на этой операции и ее влиянии на развитие понятия числа.

Когда мы говорили об операции «невозможного» вычитания и связанном с ней понятии отрицательного числа, мы различали два случая: 1) появление отрицательного числа в качестве корня уравнения и 2) использование его в промежуточных выкладках. Мы видели, что именно второй момент способствовал легализации отрицательного числа как такового, тогда как первый сам по себе был способен лишь свидетельствовать о «невозможности» уравнения.

Извлечение квадратного корня из отрицательного числа должно встречаться уже при решении квадратного уравнения, хорошо знакомом еще древним. Но здесь оно появляется только как конечный результат и свидетельствует лишь о «невозможности» уравнения, и, если положения, высказанные в § 6, правильны, то a priori ясно, что квадратный корень из отрицательного числа (или «мнимое число», как мы будем называть его в соответствии с общепринятым термином) может получить права числа лишь после того, как в некоторой математической проблеме он появится как промежуточный член выкладки, условие и результат которой вещественны.

Исторические факты подтверждают это заключение. Проблемой, поставившей вопрос о существовании мнимого числа, была проблема решения кубического уравнения. В 1545 г. итальянский математик Кардано (Ars magna de Regulis Algebraicis) опубликовал метод решения кубического уравнения вида

$$x^3 + px + q = 0,$$

к которому (как было известно и Кардано) может быть простым преобразованием приведено всякое уравнение третьей степени.

Формула Кардано (мы придерживаемся современных обозначений) имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Кардано решает помощью этой формулы такие числовые кубические уравнения, для которых число

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p^3}{3}\right)$$

положительно. В этом случае все входящие в формулу операции выполнимы в области вещественных чисел и, оставаясь в этой области, мы получаем один вещественный корень уравнения. Можно

доказать, что в рассматриваемом случае уравнение имеет только один вещественный корень и два мнимых, которые конечно не существуют вовсе в поле зрения Кардано. Для ясности рассмотрим числовой пример:

$$x^3 - 9x - 28 = 0,$$

где формула Кардано дает:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 169 > 0,$$

$$x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{169}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1}.$$

В области вещественных чисел получаем $x = 4$.

Два мнимых корня были бы

$$x = -2 + \sqrt{-3} = -2 + i\sqrt{3},$$
$$x = -2 - \sqrt{-3} = -2 - i\sqrt{3},$$

где символом i обозначено «число» $\sqrt{-1}$.

Итак если число $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ положительно, то один вещественный корень мы можем найти.

Но если это число отрицательно, то операции извлечения квадратного корня невозможна в области вещественных чисел. Если бы в этом случае уравнение не имело вещественных корней, то никаких затруднений бы не возникло. «Несуществование» числа $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ означало бы просто «несуществование» корня уравнения. Но вся беда в том, что в этом случае уравнение, как можно доказать, всегда имеет три вещественных корня. Не входя в доказательство, ограничимся примерами.

Для уравнения

$$x^3 - 21x + 20 = 9$$

формула Кардано дает:

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Но самое уравнение имеет, как легко проверить, следующие три корня:

$$x = 1;\ x = 4;\ x = -5,$$

из которых два суть «настоящие» (т. е. положительные) числа.

Точно так же уравнение

$$x^3 - 6x + 4 = 0,$$

для которого формула дает

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{6}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{6}}$$

имеет, «несмотря на мнимости», входящие в эту формулу, три вещественных корня:

$$x = 2;\ x = -1 + \sqrt{3};\ x = -1 - \sqrt{3}.$$

16. Таким образом извлечение квадратного корня из отрицательного числа оказалось посредствующим звеном между «вещественной» задачей и ее вещественным решением в проблеме решения кубического

уравнения, проблеме, которая имела актуальное значение для разрешения ряда вопросов, преимущественно геометрического характера.

Таким образом в порядок дня был поставлен вопрос о легализации мнимого числа. Сам Кардано еще не мог справиться с этой задачей; но уже Бомбелли («Algebra», 1572) находит правильное объяснение вещественности корней при наличии «мнимых» выражений в том, что один из кубических корней формулы Кардано дает число вида $a+\sqrt{-b}$, а другой число $a-\sqrt{-b}$, так что при сложении мнимости пропадают. Бомбелли сообщает, что многие считают это предположение несуразным и что он сам долго был того же мнения, считая, что «это больше похоже на софизм, чем на истину».

Не останавливаясь на том, как постепенно создавалась почва для признания «мнимого» числа за таковое, отмечу, что с полной ясностью представляет себе дело Жирар. В упоминавшейся выше работе он вероятно первый высказал положение о том, что всякое уравнение имеет столько корней, какова его степень,—положение, которое основывалось на гениальной индукции и доказательство которого заставило себя ждать более полутораста лет. В связи с этим стоит и его трактовка мнимого числа. Рассматривая уравнение

$$x^4 - 4x + 3 = 0,$$

он находит его корни:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1 + \sqrt{-2};\ x_4 = -1 - \sqrt{-2}$$

и замечает: «могут спросить, зачем нужны эти «невозможные решения» (ces solutions qui sont impossibles); отвечаю: по трем причинам: для достоверности общего правила, потому что других решений никаких нет, и из-за их пользы».

Из приведенных слов явствует, что Жирар не только учитывает роль мнимых чисел как посредников в промежуточных выкладках («из-за их пользы»), но и сознает потребность в целесообразных обобщениях, которая служит источником многих математических абстракций тем в большей степени, чем больше математика приобретает характер науки, абстракции которой связываются с практикой все более и более невидимыми, но от этого не менее прочными нитями.

По мере развития математики расширяется и область применения «мнимых» чисел к «вещественным» проблемам. Так Лейбниц (1702) применяет комплексные числа, «это чудо анализа, субстанция промежуточная между бытием и небытием», к нахождению «вещественных» интегралов. Вместе с тем получает свое оправдание и самодовлеющее изучение комплексных чисел «в себе и для себя», изучение операций над ними. Мы не будем следить за успехами этого изучения. Отметим только, что до конца XVIII в. оставался неразрешенным целый ряд парадоксов в этой области. Это не мешало однако науке, несмотря на возражения против пользования числами, употребление которых ведет к парадоксам, широко применять плодотворный по своим результатам метод исследования и находить ему применение не только в «чистой» математике, но и в точном естествознании. Все это происходило при отсутствии какого бы то ни было конкретного истолкования комплексного

числа. Лишь в конце XVIII в. Вессель (1797) дал истолкование «мнимого» числа, по существу совпадающее с тем истолкованием, которое нашло всеобщее признание (и излагается во всех современных курсах) после опубликования работы Гаусса (1831). Работа же Весселя так же, как и аналогичное открытие Аргана (1806), остались в свое время совершенно незамеченными и неоцененными.

Отсутствие конкретного истолкования было одной из главных причин возникновения парадоксов, о которых я упомянул выше. Приходится удивляться не тому, что эти парадоксы возникали, а тому, что, несмотря на их наличие, теория и практика применения «мнимых» чисел делала все новые и новые успехи. Этот последний факт служит лишним доказательством тому высказанному выше утверждению, что основным источником развития понятия числа являются не абстрактно-логические спекуляции, а конкретные потребности опыта в широком смысле этого слова.

Геометрическое истолкование мнимого числа не только привело к разрешению всех парадоксов и к созданию логически стройной «теории комплексных чисел», но и дало могучий толчок для расширения области применимости комплексного числа. В настоящее время «теория функций комплексного переменного» служит орудием исследования не только во всех математических дисциплинах, но и во всех отделах теоретической и прикладной механики и физики.

Из сделанного выше беглого обзора исторического развития понятия мнимого числа видно, что и здесь мы имеем дело с развитием в противоречиях. Наличие противоречивых элементов в логической структуре этого понятия мы можем не доказывать, так как mutatis mutandis нам пришлось бы повторять подробно развитый выше (§9—11) ход мыслей.

Поэтому мы закончим эту статью следующим кратким резюме:

1. Понятие числа не является законченным и застывшим; оно развивается исторически и логически.

2. Это развитие носит противоречивый характер.

3. Источником развития является опыт в широком смысле этого слова.

4. К потребностям опыта следует отнести и потребности математического аппарата; удельный их вес возрастает по мере развития науки.

5. Источником противоречий является синтез процессов различной природы в едином понятии числа.

6. Эти противоречия находят свое разрешение, но не исчезают полностью даже в «завершенной» логической системе, если можно говорить о таковой. Они лишь сдвигаются в область основных понятий науки.

7. Вновь возникающие «числа» представляют формальное отражение новых операций. Операция предшествует числу, а не число операции.

8. Для развития понятия числа принципиально нет границ, как безгранично поле расширения опыта, допускающего математическую обработку.

Л. Люстерник

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА[1]

Темой настоящей статьи является направление в математике, развившееся в настоящем столетии главным образом в Америке, направление, над которым работали в последнее время и некоторые советские математики.

Это направление возникло в общей динамике. Для решения целого ряда важнейших ее задач не существовало алгоритма (например для задачи о трех телах). Существовали только методы приближенного решения, с помощью которых можно было с любой точностью определять положение движущейся точки в любой данный момент, но нельзя было себе составить представления о движении в целом.

Хилл и Пуанкаре поставили новую задачу: не решая уравнения движения, судить чисто качественными методами по характеру движения в целом (например о существовании периодических орбит). Возникло направление, которое названо своими основателями качественным направлением в анализе.

Основным орудием этого направления стала топология. В работах крупнейшего современного представителя этого направления Биркхоффа она стала мощным орудием аналитического исследования.

Топология возникла как глава геометрии, изучающая наиболее глубокие структурные свойства геометрических образований, свойства, которые сохраняются при любом непрерывном преобразовании. Однако в таком своем виде топология не могла получить широкого применения в анализе. Геометрический метод при всей своей плодотворности был в классической математике чрезвычайно ограничен. Только для немногих аналитических понятий—функции одного, двух переменных—мы могли находить адэкватные геометрические образы. Для функций многих переменных, тем более для функционалов геометрического изображения не существовало. Только расширение объекта геометрии и топологии в частности позволило придать геометрическому методу универсальный характер. Появилась топология многообразий высшего числа измерений, разработанная впервые тем же

[1] Настоящая статья была написана автором для математического раздела Комакадемии в 1923, как продолжение обзора, составленного ими совместно с Л. Г. Шнирельманом и напечатанного в № 2 журнала «Естествознание и марксизм». Обзор касался новых иностранных, а настоящая статья новых московских тогда еще частью находившихся в печати работ.

Пуанкаре. А затем топология включила в свое рассмотрение образование самого общего свойства.

Она рассматривала как единое целое, как некоторое пространство такие образования, как семейства линий, классы функций («функциональное пространство»). Элементом такого пространства была соответственно линия, функция и т. п. Благодаря этому любому аналитическому образованию можно было отнести в соответствие некоторый «геометрический» образ, правда, очень отвлеченного характера. Не было ли при этом самообмана, не переносили ли мы лишь геометрические ярлыки без геометрического содержания? Нет. Всякое математическое обобщение, исходящее из понятия, имеющего простой реальный смысл, только потому может быть плодотворным, что мы сохраняем ряд свойств этого элементарного понятия и переносим его на более общее понятие. Так и здесь. Даже в максимальных своих обобщениях топология сохраняет ряд свойств обыкновенного реального пространства. Различные аксиомы, определяющие те или другие классы «абстрактных пространств», суть описания некоторых свойств нашего реального пространства, которые мы сохраняем для вводимого нами нового класса пространств. Поэтому наш богатый геометрический опыт, который является мощным орудием геометрического исследования (так называемая геометрическая интуиция), не покидает нас на вершинах топологической абстракции, наоборот, этот самый опыт приобретает в наших руках гораздо более широкое поле применения.

Итак пусть мы имеем некоторую аналитическую задачу, например задачу вариационного исчисления (наиболее разработанную в топологическом отношении). Нам нужно найти экстремаль некоторой вариационной задачи. Мы можем составить уравнение этой задачи, однако это уравнение обычно оказывается неразрешимым для нашего аналитического аппарата. Таковы уравнения орбиты в задаче трех тел, таковы, обыкновенно, уравнения геодезической линии и т. д. Основной смысл этого нового метода заключается в следующем: мы рассматриваем семейства допустимых линий, среди которых нужно найти экстремаль, как единое целое, как некоторое абстрактное пространство. И теперь по структуре самого пространства пытаемся определить существование в нем тех элементов, которые мы ищем.

На первый взгляд может показаться, что, помещая искомый элемент в множество ему подобных и образуя из них это абстрактное пространство, мы отвлекаемся от свойств исследуемого элемента. Но элемент, помещенный в некоторое целое, приобретает новые свойства, зависящие уже от этого целого,—свойства его положения в этом целом, в этом абстрактном пространстве, свойства его взаимоотношения с другими элементами, и эти именно свойства позволяют нам судить о существовании этого элемента. Все те примеры, которые мы будем рассматривать во второй половине нашей статьи, могут служить иллюстрацией этого положения. Мы ищем элемент, исследуя свойства целого, в котором он находится. Мы хотим например найти число решений некоторой вариационной задачи. Мы не будем даже выписывать уравнения этих экстремалий, мы только будем исследовать

структурные топологические свойства абстрактного пространства, составленного из допустимых линий.

Как же можно выделить один определенный элемент среди множества ему подобных, если мы не имеем возможности по рецепту эффективистов ткнуть в него пальцем. Только в том случае такой элемент может быть выделен, если он является в некотором отношении отличным от окружающих элементов, если он является элементом разрыва, лежащим на границе структурно отличных образований. Мы сейчас приведем несколько вполне элементарных примеров, которые должны иллюстрировать эту мысль. Мы сознательно возьмем сравнительно простые общеизвестные задачи, решение которых легко найти обычным способом, и подойдем к ним с этой точки зрения. Конечно, если бы только в этом заключалась сила рассматриваемых сейчас методов, они бы не представляли большой ценности; поэтому во второй половине статьи мы приводим примеры решения более сложных задач, именно таких задач, которые не были разрешены чисто вычислительным путем.

В качестве элементарного поясняющего примера я приведу пример с точками равновесия в некотором поле сил на некоторых поверхностях.

Возьмем простейший случай: обыкновенный шар в поле земного тяготения. Мы прекрасно знаем, что на его поверхности находятся две точки равновесия; если маленький шарик положить на верхнюю точку нашего шара A, то он будет находиться в состоянии равновесия (неустойчивого), если же мы этот шарик положим на самую нижнюю точку шара A (конечно, изнутри), то он будет находиться в состоянии равновесия (на этот раз устойчивого).

Шар находится в поле сил тяжести. Эквипотенциальной поверхностью для поля тяжести будут горизонтальные плоскости. Сечения этих плоскостей с поверхностью шара A дадут линии равного потенциала (эквипотенциальные линии).

Пусть максимальное значение потенциала тяготения на поверхности A равно a, а минимальное—b. Будем обозначать значение потенциала буквой x, плоскость, на которой потенциал равен x,—через $P(x)$. Будем менять x и исследовать, как будут изменяться линии пересечения $P(x)$ с шаром A. При x бо́льшем a мы пересечений иметь не будем, или, как можно выразиться, это пересечение есть пустое множество. При x равном a плоскость $P(x)$ впервые коснется шара A (сверху).

При дальнейшем уменьшении x пересечением $P(x)$—с A будет соответственная эквипотенциальная линия—окружность. (Эта окружность непрерывно изменяется вместе с x-ом). В точке a мы имели разрыв: вместо пустого множества появилась отличная вещь—замкнутая линия.

При $x=b$ произойдет вторичное прикосновение A с плоскостью $P(x)$. При x меньшем a $P(x)$ снова пересекается с A по пустому множеству (т. е. вовсе не пересекается, получает вторичный разрыв).

Весь процесс изменения можно записать следующим образом: пустое множество—линия (окружность—пустое множество).

Мы имели два разрыва: при переходе от пустых множеств к линиям и от линий снова к пустым множествам (для значения потенциалов a и b). Им отвечали две точки прикосновения шара A с горизонтальными плоскостями. Это как раз две точки равновесия.

Разберем другой элементарный пример. Вместо шара рассмотрим тор b, ось которого лежит в горизонтальной плоскости. $P(x)$ будет попрежнему обозначать горизонтальную плоскость, на которой потенциал тяготения равен x. При достаточно большом x эта плоскость расположена над тором, $P(x)$ не пересекается с ним (пересекается по пустому множеству). Будем уменьшать x. Для некоторого значения $x=a$ $P(x)$ коснется впервые тора. Для значений x, меньших a, $P(x)$ пересечется с тором по некоторой эквипотенциальной линии. Мы имеем нарушение непрерывности (переход от пустого множества к линии). Эта точка прикосновения, отвечающая нарушению непрерывности, будет точкой равновесия (верхняя точка тора). Будем еще уменьшать x. Эквипотенциальная линия, т. е. линия пересечения $P(x)$ с b, будет непрерывно изменяться. Сначала она будет похожа на окружность, затем она будет принимать вид как на черт. 1, наконец наступит момент, когда плоскость $P(x)$ коснется вторично тора, на этот раз в некоторой гиперболической точке M. Это будет отвечать значению $x=b$. Касательная плоскость $P(b)$ пересекает поверхность тора по линии, напоминающей восьмерку. Эта линия имеет в точке касания M двойную точку. Точка M является второй точкой равновесия, она отвечает новому нарушению непрерывности; при x, меньшем b, плоскость $P(x)$ будет пересекать тор по паре линий. Эта пара линий при дальнейшем уменьшении x будет сначала расходиться, затем сближаться. Наконец для некоторого третьего значения $x=c$ мы будем иметь новое нарушение непрерывности: эта пара линий сольется при дальнейшем уменьшении x, мы будем иметь уже единственную эквипотенциальную линию.

Плоскость $P(c)$ коснется тора в третьей точке равновесия.

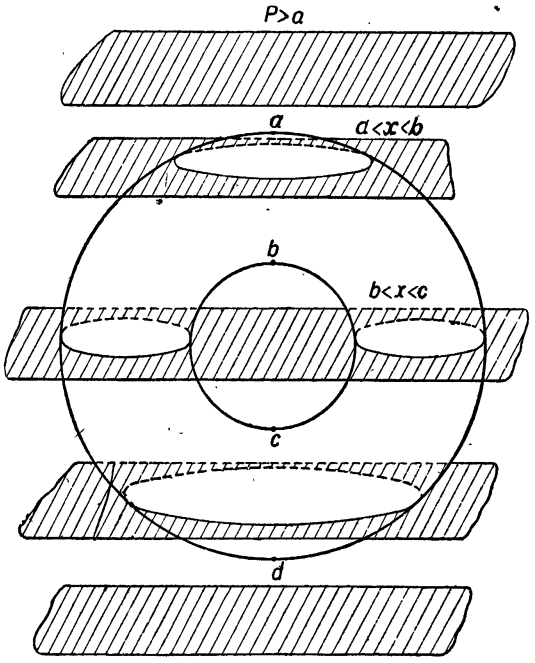
Наконец четвертая точка равновесия будет отвечать четвертому нарушению непрерывности: эквипотенциальная линия с уменьшением x сведется к точке. Это будет иметь место при $x=d$. Плоскость $P(d)$ коснется тора в четвертой точке равновесия.

При $x<d$ плоскость $P(x)$ будет пересекать тор снова по пустому множеству.

Итак при изменении x мы имели четыре раза нарушение непрерывности, четыре раза мы получали качественно новые вещи. Это отвечало положениям равновесия, значениям потенциала a, b, c и d. Процесс изменения можно записать следующим образом: пустое множество—одна линия—пара линий—одна линия—пустое множество.

Читатель может рассмотреть вместо тора другую какую-нибудь сложную замкнутую поверхность. Будем рассматривать ее сечения с плоскостями $P(x)$. Эти сечения будут, вообще говоря, непрерывно меняться. Но для некоторых значений x мы будем иметь нарушение непрерывности—сечения станут качественно отличными. Вот этим критическим значениям x и будут отвечать помеченные крестиками

положения равновесия. Мы предоставляем читателю самому записать схему изменения этих сечений. Мы могли бы вместо поля тяготения рассматривать и другое поле. Для различных значений потенциала можно было бы изучать эквипотенциальные линии на нашей поверхности. Вообще говоря, изменение эквипотенциальной линии будет совершаться непрерывно вместе с изменением потенциала. Но будут некоторые критические значения потенциала, которым будет отвечать нарушение непрерывности, переход эквипотенциальной линии в топологически отличную (или ее исчезновение). Как раз этим критическим значениям потенциала и будут отвечать положения равновесия.



Черт. 1.

Мы рассматривали во всех предыдущих примерах изменение эквипотенциальной линии. Можно вместо этого рассматривать изменения другого образа. Обозначим через $(P<x)$ совокупность точек поверхности, в которых потенциал тяготения меньше x.

Для случая шара A имеем:

1) При $x=a$, $(P<x)$ совпадает со всей поверхностью шара A, так как во всех точках нашей поверхности потенциал не превосходит a, следовательно вся шаровая поверхность совпадает с $(P<x)$.

2) При $a>x>b$, $(P<x)$ состоит из точек A, лежащих п о д плоскостью $(P=x)$; эта плоскость разбивает шаровую поверхность на две части, каждая из которых, гомеоморфна внутренности круга [1].

С топологической точки зрения область $(P<x)$ представляет собой внутренность круга.

3) При $x<b$, $(P<x)$ есть пустое множество: нет точек шаровой поверхности, на которых потенциал тяготения x меньше b.

[1] Два точечных множества называются г о м е о м о р ф н ы м и, если между их точками можно установить взаимно-однозначное и непрерывное соответствие—каждая из половинок шаровой поверхности гомеоморфна внутренности круга, если например шар сделан из растягивающейся материи, каждую его половинку можно растянуть в плоский круг.

Схема изменения $(P<x)$ может быть записана следующим образом: поверхность шара—круг [2]—пустое множество.

При $x=a$ и $x=b$ вообще $(P<x)$ переходит в топологически отличное геометрическое образование.

Аналогично для случая тора $(P<x)$ четыре раза переходит в топологически отличные образы:

1) При $x<a$, $(P<x)$ совпадает с самим тором.

2) При $a>x>b$, $(B<x)$ есть часть тора, заключающая два рода несводимых линий (меридианы первого и второго рода).

3) При $b>x>c$, $(P<x)$ заключает меридиан первого рода, но не заключает меридиана второго рода.

4) При $c<x<d$, $P<x$ уже не заключает несводимых к точке линий, оно гомеоморфно внутренности круга.

5) При $x<d$, $(P<x)$ есть пустое множество.

Точки равновесия отвечают тем значениям x, при которых $(P<x)$ переходит в топологически отличное геометрическое образование.

Непрерывная деформация

В предыдущих примерах мы рассматривали непрерывное изменение эквипотенциальной линии. Это изменение является частным случаем так называемой деформации линии.

Пусть на поверхности A задана некоторая линия K. Введем некоторый параметр t и будем изменять эту линию непрерывным образом вместе с t. (В качестве параметра может быть взято например время, в которое данная линия изменяется). Начальное значение параметра мы обозначим через t_0. Для некоторого значения параметра t точка a линии K перейдет в некоторую точку b той же поверхности A. Точка b зависит конечно от начальной точки a и от значения параметра t. Будем говорить: b есть функция точки a линии K и параметра t и обозначать ее через $b(a, t)$. Мы требуем, чтобы $b(a, t)$ была непрерывной функцией относительно обеих переменных. При $t=t_0$ b совпадает с a. Совокупность точек $b(a, t)$ для данного значения параметра t будем обозначать через Kt. Очевидно $Kt_0=K$, Kt называется образом K. Этот образ непрерывно меняется вместе с t, и это изменение называется непрерывной деформацией линии K.

Простейшими примерами непрерывной деформации является движение какой-нибудь твердой линии: деформация только изменяет положение точек этой линии, но не изменяет самой линии.

Можно рассматривать более общие деформации, деформации любого замкнутого множества. Определение останется то же самое, только K будут означать в данном случае уже не линии, а произвольное замкнутое множество.

Наконец замкнутое множество K можно предположить не на поверхности, а в произвольном многомерном пространстве. Более общим образом можно рассматривать деформацию произвольного замкнутого множества K в произвольном абстрактном топологическом пространстве.

[2] Точнее, образ, гомеоморфный кругу.

Топологические классы

Выше мы рассматривали изменение эквипотенциальных линий на поверхности шара или поверхности тора. При этом мы получили различные результаты, различное количество точек равновесия. Это обстоятельство тесным образом связано с топологической структурой поверхностей шара и тора.

На поверхности шара всякая линия сводима к точке. На поверхности же тора существуют линии, которые не сводимы к точке путем их деформации (конечно если мы будем все время оставаться на поверхности тора).

Тор образован вращением некоторой окружности K вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности и с ней не пересекающейся. При вращении окружности K она занимает разное положение на поверхности тора—эти окружности, образованные вращением окружности K, называются меридианами первого рода на торе. Эти меридианы охватывают поверхность тора. Если мы будем их деформировать, они будут попрежнему охватывать поверхность тора и никогда не сведутся к точке.

Другого рода меридианы тора—это окружности, которые описываются каждой точкой окружности K при ее вращении вокруг оси. Эти окружности тоже при деформации на поверхности тора не перейдут в точку. Кроме того меридианы одного рода не могут быть деформированы в меридианы другого рода. Мы имеем здесь различные классы линий.

Определение. Совокупность линий (K) называется топологическим классом, если она заключает в себе результат любой деформации любой из ее линий.

На торе мы имеем два топологических класса линий, не имеющих общих элементов: класс линий, получаемых путем деформации меридианов первого рода, и класс линий, получаемых путем деформации меридианов второго рода.

Можно обобщить это определение, рассматривать класс не линий, а любых замкнутых множеств.

Каждую точку можно рассматривать как замкнутое множество. Совокупность всех точек образует третий топологический класс на торе, не имеющий общих элементов с первыми двумя. Наконец можно получить четвертый класс: топологический класс, состоящий из одного элемента—самой поверхности тора. В самом деле, поверхность тора может быть деформирована только в самой себе.

На поверхности шара мы имеем два топологических класса без общих элементов: прежде всего класс, состоящий из одного элемента—из самой поверхности шара, и класс, состоящий из всех отдельных точек.

Примечание. Топологические классы, вообще говоря, не будут замкнутыми: предел последовательности множеств, принадлежащих какому-нибудь топологическому классу, может ему не принадлежать. Например предел последовательности линий может иметь два измерения.

Пример: последовательность линий A_1, B_2, A_3.., которые могут быть получены друг из друга путем деформации, имеет своим пределом целый плоский прямоугольник.

Пользование такими топологическими классами связано с некоторыми неудобствами. Поэтому мы введем понятие замкнутого топологического класса.

Определение. Топологический класс называется замкнутым, если он содержит предел любой последовательности заключенных в нем множеств.

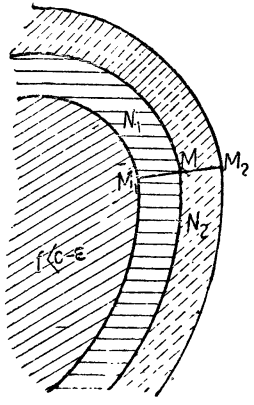
Замкнутый топологический класс получится например, если мы рассмотрим все континуумы, получаемые из какого-нибудь меридиана тора путем последовательного применения операций деформации и перехода к пределу. Можно доказать, что путем этих более общих операций из меридиана первого рода на торе нельзя получить меридиан второго рода, и наоборот, т. е. замкнутые топологические классы, получаемые таким образом из разного рода меридианов на торе, не совпадают.

Топологические классы тесно связаны с существованием точек равновесия.

Геометрические свойства точек равновесия

Точки равновесия являются так-называемыми особыми точками линий, которые читателю должны быть знакомы из курса дифференциальной геометрии.

В самом деле, вернемся к рассмотренным примерам эквипотенциальных линий на шаре и на торе для случая поля тяготения. На шаре мы имеем семейство параллельных окружностей с двумя точками равновесия. Эти точки—изолированные точки, по классификации особых точек дифференциальной геометрии. На семействе эквипотенциальных линий на торе имеем четыре особых точки—две изолированных и две двойных.



Черт. 2.

Мы для простоты рассмотрим некоторое семейство линий на плоскости, содержащее какую-нибудь особую точку. Эти линии будем рассматривать как некоторые эквипотенциальные линии. Уравнение линий этого семейства: $f(x, y)=c$, где c—значение потенциала. Пусть некоторая линия $f(x, y)=c$ не содержит особых точек. В каждой точке этой линии с координатами x, y можно провести к ней нормаль.

Возьмем на этой нормали две близких к (x, y) точки по разные стороны нашей кривой. В одной из них потенциал больше c, в другой меньше c (черт. 2.).

По разные стороны нашей кривой расположены близкие к ней кривые:

$$f = c + \varepsilon,$$
$$f = c - \varepsilon,$$

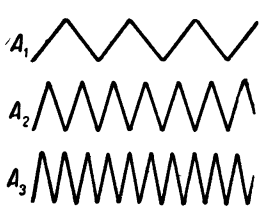
где ε—некоторое положительное число.

Нормаль, восстановленная из каждой точки кривой $f=c$, пересекает обе эти соседние кривые в близких точках. При этом две нормали, восстановленные в двух близких точках кривой, не могу пересекаться при достаточно малом ε.

В самом деле, по определению радиуса кривизны он равен отрезку нормали до пересечения с бесконечно-близкой нормалью. Так как наша кривая не имеет особых точек, то ее кривизна повсюду отлична от бесконечности, радиус ее кривизны отличен от нуля. На всей нашей кривой он положителен и превышает некоторое положительное число.

Поэтому если ε достаточно мало, то две бесконечно-близкие нормали к кривой $f = s$ не могут пересечься в полоске между кривыми $f = c$ и $f = c + \varepsilon$.

Теперь мы можем определить деформацию кривой $f = c$, обращающую ее в кривую $f = c + \varepsilon$. Для этого достаточно каждую точку кривой $f = c$ двигать по нормали к ней до ее пересечения с кривой $f = c + \varepsilon$. Легко убедиться, что кривая $f = c$ и $f = c + \varepsilon$ гомеоморфны между собой.



Черт. 3.

Черт. 4.

Изменение эквипотенциальной кривой $f = c$ совершается непрерывно.

С другой стороны, кривая $f = c$ не может содержать ни одной точки равновесия. В самом деле, точки, расположенные на этой кривой, под влиянием нашего поля сил стали бы двигаться по нормали к эквипотенциальной линии, по направлению к линии меньшего потенциала. Точка равновесия может быть только в той точке, в которой не существует нормали и эквипотенциальной линии. А такая точка уже есть особая точка. В ней обязательно обе частных производных $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ обращаются в нуль (в этом случае уравнение нормали $\frac{X-x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{df}{dy}}$ теряет смысл).

С другой стороны, отсутствие нормали делает невозможным непрерывную деформацию описанным выше способом нашей эквипотенциальной кривой в кривые меньшего (или большего) потенциала.

Наоборот, если мы знаем, что для данного значения потенциала эквипотенциальная линия топологически отлична от соседней, что она не может быть непрерывным образом деформирована в соседнюю, то отсюда следует, что эта кривая содержит точку, в которой нельзя восстановить к ней нормаль, т. е. особую точку. А значит—точку равновесия.

Таким образом получается тесная связь между точками равновесия, особыми точками эквипотенциальных кривых и нарушением непрерывности при изменении этих кривых, связь, которую мы установили на частных примерах в начале настоящей главы.

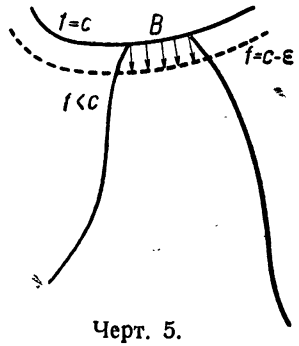
Вместе с тем намечается связь существования особых точек равновесия с существованием различных топологических классов. Ибо если эквипотенциальные линии принадлежат различным топологическим

классам, то должны существовать линии, пограничные между линиями разных классов. А эти линии будут нести точки равновесия.

Аналогично можно доказать следующее предложение. Пусть кривая $f=c$ не содержит особой точки, тогда совокупности $(f<c)$, $(f<c+\varepsilon)$ и $(f<c-\varepsilon)$ при достаточно малом C гомеоморфны. Доказательство аналогично. Обозначим через N_1 полоску между $(f=c-\varepsilon)$ и $(f=c)$; через N_2—полоску между $(f=c)$ и $(f=c+\varepsilon)$. У нас

$$(f<c+\varepsilon)=(f<c-\varepsilon)+N_1+N_2,$$
$$(f<c)=(f<c-\varepsilon)+N_1.$$

Мы сейчас отобразим N_1+N_2 на N_1. Из точки M кривой $(f=c)$ восставим нормаль M_1M_2 по обе стороны до пересечения с кривыми $(f=c-\varepsilon)$ и $(f=c+\varepsilon)$. Полоска N_1+N_2 состоит из подобных отрезков нормалей M_1M_2; полоска N_1 состоит из отрезков нормалей M_1M. Каждый отрезок M_1M легко отобразить на свою часть M_1M; тогда двойная полоска N_1+N_2 перейдет в полоску N_1, $(f<c+\varepsilon)$ перейдет в $(f<c)$. Аналогично можно отобразить $(f<c)$ в $(f<c-\varepsilon)$.



Черт. 5.

Итак, если $(f=c)$ не содержит особой точки, то $(f<x)$ при переходе $x-a$ через значение c не меняет своей топологической структуры. Если же мы имеем при этом переходе изменение топологической структуры, то $(f=c)$ содержит особую точку. Если например f означает потенциал, то $(f=c)$ содержит точку равновесия.

Все рассуждения останутся верными, если функция f определена не на плоскости, а на любой поверхности. Только вместо нормалей нужно рассматривать геодезические нормали.

Наконец можно рассматривать функцию f на любом многообразии. Если при изменении x от значений, больших c, к значениям меньшим многообразия $(f=x)$, или $(f<x)$ изменяют топологическую структуру, то $(f=c)$ содержит особую точку.

Принцип особой точки

Мы встречались неоднократно в различных задачах анализа с так называемым принципом минимума. Пусть задана некоторая дважды диференцируемая функция f. Обозначим через a нижнюю грань ее значений. Эта нижняя грань достигается в некоторой точке A. A есть особая точка функций.

В самом деле, мы имеем здесь нарушение непрерывности. Множество точек $(f<x)$ для $x>a$ есть множество не пустое; а для $x<a$—множество пустое, a есть критическое значение.

Аналогично точки, в которых достигается максимум функций, тоже являются особыми точками.

Но кроме точек максимума и минимума мы имеем еще особые точки, например две гиперболических точки для примера с тором. Эти особые точки тоже отвечают некоторым разрывам непрерывности.

Будем обозначать через $(f>x)$ множество точек, в которых функция $f>x$, через $(f=x)$ множество значений f, равных x. Будем обозначать, как и выше, через $(f<x)$ совокупность точек, в которых функция f меньше x.

Пусть (M) некоторый топологический класс. На каждом множестве нашего класса функция f достигает максимума. Обозначим через c нижнюю грань этих максимумов. Если $x>c$, $(f<x)$ содержит некоторое множество нашего класса. Если же $x<c$, $(f<x)$ не содержит ни одного множества нашего класса. В самом деле, максимум на множества нашего класса не меньше c, следовательно при $x<c$, $(f<x)$ не может полностью заключать ни одного множества из (M).

Что же мы имеем? Пусть x растет, $(f<x)$ не содержит сначала ни одного элемента класса (M). Когда же x перешагнет через c, $(f<x)$ приобретет топологически новое свойство—содержать множества класса (M). Мы получаем изменение топологических свойств. На основании наших предыдущих рассуждений следует, что $(f=c)$ содержит хоть одну особую точку, точку, в которой $\alpha f=0$. Получаем топологический критерий существования решений уравнения $\alpha f=0$. Каждому топологическому классу (M) отвечает для данной функции некоторое особое значение c, такое, что $(f=c)$ содержит особую точку, точку, в которой $\alpha f=0$. Это так называемый принцип особой точки.

Итак получаем следующую теорему.

Принцип особой точки. Пусть в некотором многообразии M задана функция f, дважды диференцируемая по всем направлениям. Рассмотрим топологический класс M, заданный в этом многообразии. На каждом множестве этого класса функция f достигает своего максимума. Обозначим через c нижнюю грань этих максимумов, c есть критическое значение функции f, т. е. $f=c$ содержит особую точку.

Пользуясь принципом особой точки, мы можем утверждать, что на поверхности шара имеются, вообще говоря, две особых точки, отвечающие двум, существенно различным его топологическим классам. На торе таких точек должно быть по крайней мере четыре, отвечающих этим четырем классам.

Таким образом вопрос о существовании решения уравнения $df=0$ связывается с вопросом о топологических классах на многообразии R. Этот вопрос разрешается в зависимости от структурных свойств этого многообразия, а не от свойств самой функции f. Это является одним из многочисленных примеров, иллюстрирующих высказанное по этому поводу в начале статьи общее соображение.

Примечание. Для дальнейшего нам придется несколько уточнить принцип особой точки. В топологическом классе M существует множество m_0, в котором максимум функций f как раз равен c. Обозначим через B пере-

сечение m с гиперповерхностью $(f=c)$. B должно заключать особые точки в функции f.

В самом деле. Если B не содержит особых точек, то как мы видели, в каждой его точке можно провести нормаль к $(f=c)$ в сторону меньших значений f, в сторону $(f<c)$, а тогда мы можем произвести вышеописанную деформацию: двигать точки B и окрестные их точки по нормалям к $f=c$, пока они не попадут на гиперповерхность $(f=c-\varepsilon)$, где ε некоторое положительное число.

А тогда деформированное множество B целиком очутится в области, где $f<c$, максимум f измененном B будет меньше того же c. Но измененное B тоже принадлежит нашему топологическому классу. А это противоречит определению c, как нижние границы подобных максимумов.

Мы теперь перейдем к другой задаче-оценке количества решений нашего уравнения $af=o$. Эта задача тоже сводится к исследованию структурных свойств многообразия R, а не к исследованию специальных свойств нашей функции f.

Количество решений связано некоторым образом с количеством топологических классов. Однако эта связь не вполне точная: особые точки, отвечающие разным топологическим классам, могут отливаться. И вопрос о количестве особых точек функции требует более тонких исследований структуры многообразия R.

Вернемся к поверхности сферы. Всякая функция, на ней определенная, имеет во всяком случае две особых точки — точку максимума и точку минимума. Совпадение этих двух точек влечет за собой появление континуума особых точек: ведь в этом случае функция обращается в константу, ее полный диференциал обращается в нуль.

Итак среди особых точек есть существенно друг от друга отличные. Можно построить на данном многообразии несколько особых топологических классов, обладающих следующим свойством: если особые значения некоторой функции, отвечающие этим топологическим классам, совпадают, то появляется континуум особых точек для данного особого значения. Решение этой задачи автором было связано с введением нового топологического инварианта.

Эти классы определяются очень просто. Мы называем некоторое замкнутое множество множеством категории *1* на данном многообразии, если оно сводимо путем деформации на нем к точке. Мы называем множество множеством категории p, если оно может быть разбито на p частей категории *1*, но не может быть разбито на меньшее число частей. Например любая часть поверхности сферы сводима на ней к точке, следовательно имеет категорию *1*. Сама же поверхность сферы имеет на себе категорию 2, потому что, будучи несводимой к точке, она разбивается на 2 части, сводимых к точкам.

На торе меридианы имеют категорию *2*. Сам тор, как нетрудно убедиться, имеет категорию *3*. Довольно просто доказываются следующие свойства категорий:

1. Категория суммы двух множеств A и B не больше суммы категорий этих множеств.

2. Разность двух множеств A и B содержит замкнутое множество категории не меньшей, чем разность категорий этих множеств.

3. При деформации категория не понижается.

4. При переходе к пределу категория не понижается.

Обозначим через T_i совокупность всех замкнутых множеств, категория которых не меньше i. T_i есть замкнутый топологический

класс (T_1 есть совокупность всех замкнутых множеств на данном многообразии, T_2—всех, не сводимых к отдельным точкам множеств.). Если категория самого многообразия равна n, то можно построить n топологических классов T_1, T_2,... Tn множеств на данном многообразии. Им отвечают для заданной функции f n особых значений C_1, C_2... Cn,—где Ci нижняя грань значений f на множествах класса T_i. Если эти числа отличны друг от друга, то во всяком случае отличны соответственные особые точки, число которых не меньше n. Если же двое из этих чисел совпадают, то число особых точек становится бесконечным,—более того, множество особых точек имеет категорию не меньшую, чем число совпавших особых значений плюс единица [1].

В самом деле, пусть $C_i+p=C_i=C$. Обозначим через A совокупность точек, в которых $f=c$, $df=O$. Пусть категория A не превышает p. Мы постараемся при таком предположении получить противоречия.

В классе M_i+p существует множество $M+p$, на котором максимуму f равен C. Из свойства а) категорий, следует при нашем предположении о категории A, что в C_i+p заключается замкнутое множество M_i, не имеющее общих точек с A (), причем категория $M_i \leqslant i$, следовательно принадлежит к классу ti. Максимум функции f на ti не меньше C, так как нижняя грань Ci этих максимумов на множествах класса M равна C. С другой стороны, так как M_iCM_i+p, максимум f на tI не больше максимума f на всем $Mi+p$, т. е. того же c, значит на M функция f имеет максимум число $C=Ci$. А тогда, на основании уточненного принципа особой точки, T_i должно заключать точку, в которой $f=C_i$ и $df=O$ по определению A эта точка должна заключаться в A. Итак ti должно иметь общую точку с A, но мы вступаем в противоречие с определением ti.

Итак совпадение двух или более особых значений C_i влечет за собой существование целого несводимого континуума особых точек функции f, причем этот континуум тем более сложной структуры, чем больше совпало особых точек.

Во всяком случае число геометрическях отличных особых точек не меньше n, где n категория многообразия. Итак для отыскания минимального числа решений уравнения $df=0$ нужно исследовать категорию многообразия R, а не свойства функции f.

Примечание. Оценка категорий оказалась связанной с некоторыми комбинаторными свойствами многообразий. По аналогии с теорией идеалов было введено Л. Шнирельманом понятие делителя многообразия (где существование делимого и делителя не требует существования частного [2]). Категория не меньше, чем цепочка последовательных делителей данного многообразия. С другой стороны, она не выше его размерности плюс единица. Оказывается возможным оценивать категории снизу и сверху. Проективное (n—1)-мерное пространство оказывается делителем n-мерного. Цепь последовательных делителей: n-мерное проективное, (n—1)-мерное ... 3-мерное, 2-мерное (проективная плоскость), 1-мерное (проективная прямая), 0-мерное (точка). Она заключает $n+1$ членов. Категория проектив-

[1] См. L. Lusternik, Über topologiscne Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie.

[2] L. Schnirelman, Über eine neue topologische Invariante Monatsheft für Mathematik und Physik. 1930.

ного пространства n измерений пространства не меньше $n+1$; с другой стороны, она не больше $n+1$, следовательно равна ему. А значит всякая функция, определенная на n-мерном проективном пространстве, имеет или $n+1$ геометрически отличных особых точек или бесконечное множество их.

Мы теперь перейдем к задачам вариационного исчисления, для которых и были созданы вышеозначенные методы. В чем отличие этих задач от вышерассматриваемых? Только в том, что в вышеприведенных задачах мы из некоторого многообразия старались выделить точку, в которой полный дифференциал некоторой функции обращается в нуль. Здесь мы будем из некоторого класса линий выделять линию, на которой вариация некоторого интеграла исчезает. Разницы принципиальной между этими задачами нет, только вместо многообразия мы будем рассматривать абстрактное семейство, образованное некоторыми линиями. Все понятия, с которыми мы ознакомились: топологический класс, категории и т. д., а также и все основные теоремы—переносятся на этот случай.

Как например обобщить понятие топологического класса? Мы будем рассматривать вместо множества точек семейства линий. Топологическим классом семейств линий мы будем называть такой класс, который содержит результаты деформаций любого входящего в него семейства. Для простоты я буду говорить об одной частной вариационной задаче, хотя, как мы могли убедиться, вопрос не связан с специфическими особенностями этой задачи. Я буду говорить о геодезических линиях—экстремалях, на которых исчезает вариация от длины кривой.

Пусть дан некоторый топологической класс линий. На каждом семействе этого класса длина кривой достигает своего максимума. Обозначим через c нижнюю границу этих максимумов. Принцип особой точки будет гласить: существует геодезическая линия длины c. Или, для того чтобы сохранить терминологию принципа особой точки, формулируем это следующим образом: обозначим через $F(l)$ длину кривой l, а через $(F=c)$ множество линий, для которых $F=c$. Если c есть нижняя грань максимумов F на семействах нашего топологического класса, то $(F=c)$ содержит линию, на которой $SF=0$ («особый элемент» функционала F).

Конечно доказательство будет несколько сложнее, чем доказательство элементарного принципа особой точки, потому что здесь мы имеем дело с более сложными образованиями. Но идея этого доказательства по существу та же самая.

Столь же естественно обобщается для нашего случая и другое основное понятие—категории. Мы назовем семейством категории 1, если его можно деформировать в систему точек; категория же произвольного замкнутого семейства есть минимальное число семейств категории 1, на которое это семейство можно разбить. Применение тех же рассуждений по существу, что и выше, дает результат: число геодезических линий на некотором многообразии будет не меньше K, если на этом многообразии существует семейство категории k.

Из задач, разрешенных подобными методами, укажем на задачу о существовании трех по крайней мере замкнутых геодезических, на

любой поверхности гомеоморфной сферы. Решение этой задачи приведено в нашей общей с Л. Г. Шнирельманом книжке: «Топологические методы в вариационных задачах». Для решения этой задачи нам не нужно было даже составлять уравнения геодезической линии. Нам достаточно было исследовать структурные свойства семейств замкнутых линий на этих поверхностях, точнее—изучить их категорию. Так как на этих поверхностях существовали семейства категорий *4*, то наша вариационная задача должна была иметь по крайней мере четыре решения. Одно решение тривиальное: отдельную точку можно рассматривать как замкнутую геодезическую. Три других решения и дали эти три замкнутых геодезических. Мы довольно подробно излагали московские работы по качественным методам анализа. Эти работы охватывали одну область их применения—вариационное исчисление. Наряду с вариационным исчислением качественные методы со времени Пуанкаре применяются к исследованию форм решений дифференциальных уравнений; особенно в исследовании форм решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Имеют ли значения исследования подобного рода, если, обнаруживая качественными методами существование тех или иных кривых, и т. п., мы не даем эффективного процесса их построения. Мы не можем считать правильной ту ограниченную точку зрения, которая признает в математике только то, для нахождения чего дан регулярный процесс. В подобного рода исследованиях регулярного процесса мы не даем. Мы не можем например дать эффективного процесса нахождения на данной конкретной поверхности тех трех геодезических, существование которых мы можем доказать. Но делает ли эта естественная ограниченность качественных методов математики их бессодержательными, а предложения, доказанные таким образом, лишенными реального содержания?

Обнаружив существование геодезической на некоторой поверхности, мы несомненно обнаружили некоторый реальный геометрический факт.

С другой стороны, чисто качественное решение вопроса отнюдь не делает излишним дальнейшее исследование над его количественным разрешением. Для некоторых задач именно может быть важно знать точное положение какой-нибудь экстремали, существование которой мы обнаружили качественным путем. Особенно это важно конечно, если мы подобные методы будем распространять на задачи физики и механики. Обнаружение например периодических орбит в некотором движении, даже если мы не умеем точно их определять, было бы открытием некоторого физического факта, которое не избавило бы нас от необходимости более точного отыскания его.

Обзор специально московских работ оказался к сожалению неполным.

Уже во время печатания настоящей статьи автору удалось отчасти познакомиться с интересными работами московских физиков Андронова и Витта. При исследовании некоторых явлений в области радиопередачи мы встречаемся с нелинейными дифференциальными урав-

нениями, непосредственное решение которых представляет, как известно, непреодолимые затруднения. Поэтому они прибегли к качественным исследованиям в духе известных работ Poincaré о формах решений дифференциальных уравнений. Эти исследования объяснили некоторые до сих пор необъясненные феномены в радиопередаче и помогли обнаружить новые.

Результаты качественных исследований, проводимые в области физических явлений, могут быть иногда физически легко проверяемы, несмотря на «не эффективность» методов. В самом деле, иногда можно качественно обнаружить существование каких-нибудь устойчивых состояний, к которым с течением времени приближаются все остальные.

При процессах, совершающихся очень быстро, всякое состояние через короткий промежуток времени перейдет в устойчивое. Таким образом, результаты, положенные качественными исследованиями, несмотря на их «незаконность» с интуиционистской точки зрения, могут быть проверены непосредственным экспериментом. Таким образом, в физике получается естественное поле применения качественных методов анализа.

В. Гливенко

ИНТЕГРАЛ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЕСТЕСТВОЗНАНИИ [1]

Понятие интеграла занимает совершенно исключительное место как в самом математическим анализе, так и в его приложениях к математическому естествознанию. В теоретической физике и химии, равно как и во всех базирующихся на них технических дисциплинах, на каждом шагу встречаются задачи, решение которых приводится в конечном счете к вычислению тех или иных интегралов. Измерение длин, площадей, объемов, масс, количеств энергии и других физических величин, разыскание функций по их производным и решение дифференциальных уравнений, определение средних значений функций и тесно связанный с этим определением гармонический анализ эмпирических функций, определение вероятных значений случайных величин— все это достигается при помощи интегрирования. Интеграл является настолько мощным и распространенным орудием в руках современного исследователя, что естественно возникает вопрос—чем объясняется такая универсальность этого понятия?

Ответ на этот вопрос заключается в том, что интегрирование дает общий метод измерения физических величин. В этом—основа всего значения интегрирования для естествознания. Не следует впрочем думать, будто задача измерения любых физических величин окончательно решается той классической теорией интегрирования, которая излагается в учебниках математического анализа. Для многих таких величин, которые принадлежат к самым простым и давно известным объектам изучения физики и даже геометрии, общая теория их измерения разрабатывается только в наши дни.

I

Чтобы начать с чего-нибудь определенного, вспомним, как применяется интегрирование к вычислению материальной массы.

Для простоты дальнейших выкладок предположим, что данная масса распределена на прямолинейном отрезке ab и что нам известен закон этого распределения, т. е. что нам известно, какова плотность материи в каждой точке x нашего отрезка. Когда эта плотность неизменна на всем отрезке и равна постоянному числу ρ, то интересующая нас масса равна, как известно, произведению плотности на длину отрезка, то есть равна $\rho \cdot ab$. Но когда плотность меняется от точки к точке, когда следовательно она является

[1] «Научное слово», 1930 г., № 2.

некоторой функцией $\rho(x)$ точки, то мы можем сколько-нибудь точно вычислить всю распределенную на отрезке массу только в том случае, если предварительно разделим наш отрезок ab на столь малые части ax_1, x_1x_2, x_2x_3, ..., чтобы на протяжении каждой такой части в отдельности изменение плотности было незаметным; это даст нам основание считать плотность в каждой части отрезка как бы неизменной, равной последовательно числам ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... Тем самым мы получим возможность приравнять массы в отдельных частях отрезка произведениям $\rho_1 ax_1$, $\rho_2 x_1x_2$, $\rho_3 x_2x_3$, ... и следовательно считать всю массу на отрезке ab равной сумме

$$\rho_1 ax_1 + \rho_2 x_1x_2 + \rho_3 x_2x_3 + \dots$$

Разумеется, результат не будет абсолютно точен, поскольку плотность материи в каждой взятой нами части отрезка на самом деле все-таки не равна постоянному числу, но меняется, хотя бы и незаметно для нас. И стремление придать совершенную точность такому измерению массы и подобных ей величин естественно побуждало математиков внести известный элемент идеализации в процесс подразделения отрезка на части, подобно тому как математика идеализирует повседневные наблюдения, говоря о геометрических точках, прямых, плоскостях и т. п. Эта проблема занимала уже математиков XVII в., начиная с Кеплера и кончая Лейбницем. Они искали разрешения этой проблемы в том, что допускали теоретическую возможность подразделения отрезка на столь малые части, что на протяжении этих последних величин никакое действительное изменение каких-либо величин, в частности и плотности, уже невозможно. Говоря языком того времени, они считали возможным рассматривать отрезки как бы составленными из «неделимых» или «бесконечно-малых» частей. Тогда суммы такого вида, как та, которую мы написали выше, но только составленные после подразделения отрезка не на конечные, а на «бесконечно-малые» части, очевидно давали бы совершенно точное решение задачи измерения массы или подобных ей величин. Такие суммы Лейбниц предложил обозначить особым символом

$$\int_a^b \rho(x)\,dx,$$

где dx символизирует длину каждой «бесконечно-малой» части отрезка; в начале же стоит удлиненная в стиле печати XVII в. буква S. Современник Лейбница Яков Бернулли предложил для таких сумм название интеграла.

Лейбниц открыл общий способ вычисления интегралов, заметив, что вычисление это можно рассматривать как действие, обратное разысканию производных. Это открытие сделало эпоху в науке и очень скоро было по достоинству оценено.

Однако в течение всего XVIII в. отсутствует обоснование новых методов анализа, и идут ожесточенные споры о природе основных его понятий. В начале XIX в. это завершилось построением новой системы основных понятий математического анализа в работах Коши. Что касается именно интеграла, то при его определении Коши допускает

подразделения отрезка ab лишь на обыкновенные конечные части; но он не ограничивается одним единственным подразделением, а берет одно за другим подразделения на все более и более мелкие части и, что самое существенное, он мыслит этот процес дробления отрезка ab продолжающимся неограниченно и никогда не оканчивающимся; если при этом суммы, соответствующие отдельным последовательным подразделениям, оказываются все менее и менее отличающимися по величине от какого-нибудь определенного числа S, то это число S и будет называться интегралом.

Эта концепция предела, к которому неограниченно приближается изменяющаяся величина, сохранила все свое значение и до нашего времени. Все дальнейшие определения интеграла содержат в качестве заключительного звена такой переход к пределу и отличаются одно от другого лишь природой частей, на которые производится подразделение, и величин, из которых составляются соответствующие отдельным подразделениям суммы.

Мы привели пример измерения распределенной на прямолинейном отрезке материальной массы. Скажем теперь несколько слов об измерении физических величин вообще.

Измерение связано по существу лишь с одной математической операцией—со сложением. В самом деле, измерение собственно и заключается в сложении между собой тех элементарных единиц меры—отрезков, квадратов и т. п., которые содержатся в измеряемой величине. Иные математические операции, применяемые тут и там при измерениях, имеют только вспомогательное значение, упрощая связанные с измерением подсчеты. Если при этом подлежащая измерению величина не может быть полностью составлена из конечного числа элементарных единиц меры (как например круг не может быть составлен из конечного числа квадратов), то для точного измерения этой величины нет иного по существу пути, как только путь последовательных приближений, где каждый отдельный шаг есть опять-таки не что иное, как сложение между собой некоторых элементарных мер, но только здесь не может быть последнего шага, и volens-nolens приходится иметь дело с неограниченным рядом шагов, постепенно приближающих нас к искомой величине.

А такое неограниченно возобновляемое, с целью достижения все большей и большей точности измерения, сложение элементарных мер почти всегда оказывается той или иной разновидностью интегрирования.

Возьмем например измерение работы силы F на перемещении материальной точки по криволинейному пути C. Положение каждой точки данной кривой может быть определено длиной s той части кривой, которая простирается от начала кривой до данной точки. Поэтому и проекция силы F на направление кривой C в точке данной кривой будет функцией $\varphi(s)$ длины. Если эта проекция неизменна вдоль всего пути C, то, как известно, интересующая нас работа равна произведению этой проекции на длину кривой C. Но может случиться, что проекция $\varphi(s)$ будет меняться от точки

к точке, так что она не только не будет иметь постоянной величины вдоль всего пути C, но даже нельзя будет подразделить кривую C на конечное число таких отрезков, чтобы $\varphi(s)$ оставалась неизменной на протяжении каждого из этих отрезков в отдельности. Иначе говоря, может случиться, что прямое составление работы силы на перемещении по пути C из элементарных единиц работы будет нам фактически недоступно. Тогда для определения этой работы поступают следующим образом: подразделяют кривую C на отрезки s_0s_1, s_1s_2, s_2s_3, ... и берут проекции φ_1, φ_2, φ_3, ... силы F на направление кривой в каких-нибудь точках, выбираемых наугад, по одной в каждом отрезке. Если взятые отрезки очень малы, так что на протяжении каждого из них проекция силы F на направление кривой изменяется незначительно, то произведения выбранных проекций и длин соответствующих отрезков $\varphi_1\overline{s_0s_1}$, $\varphi_2\overline{s_1s_2}$, $\varphi_3\overline{s_2s_3}$, ..., будут приблизительно равны работам силы на перемещении по этим отрезкам, и следовательно сумма

$$\varphi_1\overline{s_0s_1} + \varphi_2\overline{s_1s_2} + \varphi_3\overline{s_2s_3} + \ldots$$

будет приблизительно равна работе силы на перемещении по всему пути C. Предел же таких сумм, получаемых при последовательном дроблении кривой C на все более и более мелкие отрезки, будет уже в точности равен работе силы на перемещении по пути C. В то же время этот предел не что иное, как $\int_C \varphi(s)\,ds$ криволинейный интеграл.

В других случаях измерение приводит к так называемым кратным интегралам, к поверхностным интегралам и т. д. В принципе не почти всякое, как мы сказали выше, а всякое измерение должно было бы быть интегрированием. И если математика, по крайней мере классическая математика, не всегда записывает результаты измерения в виде интегралов, то лишь по той простой причине, что у нее не всегда имеется строгое определение интеграла, который отвечал бы тому или иному измерению. В наши дни однако почти все затруднения на этом пути уже преодолены благодаря последовательным расширениям классического понятия интеграла. К ним мы теперь и перейдем.

II

Классические интегралы обладают одним общим им всем свойством. Когда область интегрирования, т. е. та область физического мира, в которой рассматривается подлежащая интегрированию функция φ, подразделяется на части, и когда в этих частях выбирается по одному значению этой функции, то эти значения умножаются на величины самих частей. Между тем при измерении физических величин это отнюдь не обязательно: часто следует умножать выбранные значения функции φ не на величины самих частей области, а на какие-нибудь другие величины, связанные с этими частями области. Иногда это просто более соответствует сути дела, иногда же бывает и прямо необходимо.

Примером того, когда это просто более естественно, может служить определение статического момента массы, распределенной на прямо-

линейном отрезке длины, единица относительно начальной точки этого отрезка. Определяется этот момент так: положение каждой точки отрезка определяется ее расстоянием x от начальной точки; так например сама начальная точка будет обозначаться числом 0. Весь отрезок подразделяется на части $0x_1$, x_1x_2, x_2x_3,..., и в каждой из этих частей отмечается по одной точке, например крайние точки x_1, x_2, x_3,... Затем одна за другой берутся массы, расположенные в каждой из наших частей—пусть это будут массы $m(0x_1)$, $m(x_1x_2)$, $m(x_2x_3)$,...—и составляются произведения $x_1m(0x_1)$, $x_2m(x_1x_2)$, $x_3m(x_2x_3)$,... Предел, к которому приближаются суммы

$$x_1m(0x_1) + (x_2m(x_1x_2) + x_3 \cdot m(x_2x_3) + \dots$$

при неограниченном дроблении отрезка на все более и более мелкие части, и будет искомым статическим моментом.

Несмотря на все сходство описанного процесса измерения статического момента с теми определениями интегралов, которые мы приводили выше, в классических руководствах по анализу мы не найдем такой разновидности интеграла, которая соответствовала бы этому процессу измерения, как он здесь описан. Объясняется это именно тем, что здесь при установлении элементарных мер используются не величины самих частей области интегрирования, а лишь связанные с этими частями массы. Поэтому классический математический анализ подходит к определению статического момента более сложным и окольным путем. После подразделения отрезка на части $0x_1$, x_1x_2, x_2x_3,... и выбора в них точек x_1, x_2, x_3,... берутся не массы, расположенные на этих частях, а приблизительно равные им произведения плотности материи в выбранных точках на величины самих частей. Заметим между прочим, что плотности $\rho(x)$ в точках x_1, x_2, x_3,... принято обозначать через $\rho(x_1)$, $\rho(x)_2$, $\rho(x_3)$,..., а величины частей $0x_1$, x_1x_2, x_2x_3,... в соответствии с определением положения точек отрезка по их расстояниям x от начальной точки принято обозначать через x_1, $x_2—x_2$, $x_3—x_2$,... Таким образом статический момент определяется как предел сумм

$$x_1\rho(x_1)x_1 + x_2\rho(x_2)(x_2 - x_1) + x_3\rho(x_3)(x_3 - x_2) + \dots$$

предел, который, как и в первых наших примерах, является интегралом

$$\int_0^1 \rho x(x)dx.$$

Практически дело обстоит так, что разница между массами $m(0x_1)$, $m(x_1x_2)$, $m(x_2x_3)$,... и произведениями $\rho(x_1)x_1$, $\rho(x_2)(x_2—x_1)$, $\rho(x_3)(x_3—x_2)$,... в пределе исчезает и написанный интеграл действительно оказывается равным статическому моменту в прежнем нашем определении. Но по существу самого понятия статического момента разложение масс на плотности и величины частей является совершенно излишним, и на самом деле это разложение только для того и производится, чтобы втиснуть механическое понятие статического момента в слишком узкие для него рамки классического математического анализа.

Между тем как раз в том, что касается статического момента, математический анализ уже сравнительно давно обладает хорошим

средством для его определения: интегралом Стильтьеса (1894). И на примере статического момента как раз удобнее всего познакомиться с сущностью этого обобщения понятия интеграла. Стильтьес начинает с того, что определяет положение каждой точки отрезка одновременно двумя различными способами; не только ее расстоянием x от начальной точки отрезка, но и той массой $\mu(x)$, которая расположена между ней и начальной точкой. Затем, как и при классическом определении, Стильтьес подразделяет весь отрезок на части $0x_1$, x_1x_2, x_2x_3,... и берет расположенные на этих частях массы $m(0x_1)$, $m(x_1x_2)$, $m(x_2x_3)$,... Но теперь—в соответствии со вторым способом определения положения точки x на отрезке при помощи массы $\mu(x)$, расположенной между этой точкой и начальной точкой отрезка—можно сказать, что масса $m(0x_1)$, расположенная между точками x_1 и 0, равна $\mu(x_1)$; масса $m(x_1x_2)$, расположенная между точками x_2 и x_1, равна $\mu(x_2)—\mu(x_1)$, масса $m(x_1x_2)$, расположенная между точками x_3 и x_2, равна $\mu(x_3)—\mu(x_2)$ и т. д. Поэтому вместо написанных нами раньше сумм Стильтьес пишет сумму

$$x_1\mu(x_1) + x_2[\mu(x_2) - \mu(x_1)] + x_3[\mu(x) - \mu(x_2)] + .$$

Предел таких сумм при неограниченном дроблении отрезка на все более и более мелкие части Стильтьес называет интегралом величины x относительно функции $\mu(x)$ и обозначает его так:

$$\int_0^1 x\, d\mu(x).$$

Аналогичным образом можно интегрировать на любом отрезке ab не только самую величину x, но и любую ее функцию $\varphi(x)$, и не только относительно массы $\mu(x)$, но и относительно всякой возрастающей функции $\psi(x)$. Предел соответствующих сумм будет интегралом Стильтьеса:

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x).$$

В нашем случае—определении статического момента—употребление интеграла Стильтьеса вместо классического интеграла более естественно, но без него можно и обойтись. Но есть и целый ряд случаев, в которых этот интеграл незаменим. К сожалению разбор таких случаев требует специальных знаний и здесь невозможен. Ограничимся указанием, что интеграл Стильтьеса стал необходимым орудием в современной теории вероятностей и в квантовой механике.

Впрочем, по широте охвата интеграл Стильтьеса значительно уступает его прямому обобщению—интегралу Радона (1913). Столь большое расстояние во времени между появлением того и другого определений интеграла—20 лет—объясняется тем, что в определении интеграла Радона используются новые для математического анализа понятия, появившиеся и достаточно хорошо изученные лишь за этот промежуток времени. В громадной работе новой перестройки математического анализа на основе теории множеств, начатой Кантором, а в части интегрирования проделанной главным образом Лебэгом, Радон сделал лишь последний шаг.

В предыдущих примерах определения интеграла мы сначала пользовались величинами частей, на которые мы подразделяли область интегрирования, а потом, в случае интеграла Стильтьеса, мы пользовались вместо величин самих частей другими величинами, связанными с этими частями. При этом новые величины, заменявшие величины самих частей, были все же таковы, что они опять-таки могли служить какой-то мерой, хотя бы и косвенной, тех же самых частей. Мы ясно видим это на примере определения статического момента по Стильтьесу, где, так же как и при классическом определении, мы оцениваем количественно части отрезка, «измеряем» эти части, но только «измеряем» их не прямо по их длине $x_i - x_{i-1}$, а косвенно, по количеству содержащейся в них материи $\mu(x_i) - \mu(x_{i-1})$. Кратко говоря, и здесь и там мы интегрировали относительно каких-то физических м е р самой области интегрирования и ее частей.

Это замечание и лежит в основе определения интеграла по Радону. Поэтому, чтобы составить себе представление о математическом содержании интеграла Радона, нужно попытаться математически охарактеризовать то, что может быть названо мерой.

Мы говорим о длине частей отрезка, о массе, расположенной на этих частях и т. д. Таким образом мера прежде всего—величина, которая соответствует не отдельным точкам тех или иных областей физического мира, а целым областям или их частям. Такие величины естественно называть функциями области; их и обозначают как обыкновенные функции, т. е. если области обозначены хотя бы через D, то функцию области можно обозначить например через $f(D)$. Заметим еще, что длина целого отрезка складывается из длин его частей; что масса, распределенная на целом отрезке, складывается из масс, распределенных на его частях и т. д. Таким образом меры принадлежат к функциям области, обладающим тем свойством, что при подразделении области D на части $D_1, D_2, D_3, \ldots$ непременно имеет место равенство

$$f(D) = f(D_1) + f(D_2) + f(D_3) + \ldots$$

Такие функции называются аддитивными.

Определение интеграла Радона и построено на понятии аддитивной функции области.

Заметим, что все наши предыдущие определения интеграла строились по следующей схеме: мы брали какую-нибудь область физического мира D и определенную для точек P этой области функцию $\varphi(P)$ и имели определенную для частей области D аддитивную функцию области $f(D)$; мы подразделяли взятую область D на части $D_1, D_2, D_3, \ldots$, в каждой из этих частей выбирали по одной точке $P_1, P_2, P_3, \ldots$ и брали, с одной стороны, величины $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3), \ldots$, а с другой стороны, величины $f(D_1), f(D_2), f(D_3), \ldots$; наконец мы составляли сумму

$$\varphi(P_1) \cdot f(D_1) + \varphi(P_2) \cdot f(D_2) + \varphi(P_3) \cdot f(D_3) + \ldots$$

и предел таких сумм, получающихся при неограниченном дроблении области D на все более и более мелкие части $D_1, D_2, D_3 \ldots$, мы называли интегралом функции $\varphi(P)$ относительно $f(D)$. В этом общем виде всякий из наших прежних интегралов можно обозначить так:

$$\int_D \varphi(P)\,df(D).$$

Такой интеграл, т. е. всякий интеграл, получаемый по описанной общей схеме, и есть интеграл Радона от функции $\varphi(P)$ относительно $f(D)$.

Примером задачи на измерение физической величины, непосредственно приводящей к интегралу Радона, а не к какому-нибудь классическому интегралу, может служить такая задача. Пусть дано физическое тело D, и для каждой точки P этого тела известна удельная теплота $c(P)$ тела в этой точке; требуется определить количество тепла $w(D)$, необходимое для нагревания этого тела на 1^0. Задача эта решается так: тело D подразделяется на весьма малые части D_1, D_2, D_3,.. и в каждой из этих частей выбирается по одной точке P_1, P_2, P_3,..., затем берутся удельные теплоты $c(P_1)$, $c(P_2)$, $c(P_3)$...в выбранных точках и массы $m(D_1)$, $m(D_2)$, $m(D_3)$,... взятых частей тела; из этих последних величин составляется сумма

$$c(P_1)\cdot m(D_1) + c(P_2)\cdot m(D_2) + c(P_3)\cdot m(D_3) + \ldots;$$

предел таких сумм и является искомым количеством тепла $w(D)$. В то же время этот предел не что иное, как интеграл Радона

$$w(D) = \int_D c(P)\,dm(D).$$

И все же, как ни обще это новое определение интеграла, оно еще не охватывает целого ряда случаев измерения физических величин. Сейчас мы увидим, что дальнейшее расширение понятия интеграла действительно необходимо.

III

Мы сказали, что измерение само по себе связано только с одной математической операцией—со сложением, так как оно и является сложением между собой элементраных мер. Часто только мы не можем произвести измерение сразу, составив одну определенную сумму, и должны прибегать к последовательным приближениям, составляя неограниченный ряд сумм.

Такое сложение элементарных мер мы и имеем во всех определениях интеграла. Но бросается в глаза еще и то обстоятельство, что сами элементарные меры неизменно определялись у нас при этом путем умножения других, уже заранее готовых мер, на некоторые переменные множители. Так, те элементарные массы, из которых складывалась масса, распределенная на отрезке ab, определялись нами как произведения длин отдельных частей отрезка ab на плотности ρ_1, ρ_2, ρ_3, ...; те элементарные работы, из которых складывалась работа силы на перемещении по пути C, определялись нами как произведения длин отдельных частей пути C на проекции силы φ_1 φ_2 φ_3, ... и т. д. Выбор этих переменных множителей диктовался нам законом распределения измеряемой величины в данной области физического мира, и поэтому мы и говорили об интегрировании функций, которыми определялось это распределение: функции $\rho(x)$, функции $\varphi(x)$ и т. д.

Вот для этих-то случаев,—когда слагаемые, из которых получается интеграл, сами получаются от умножения аддитивной функции области на обыкновенную функцию,—определение Радона и является наиболее общим определением интеграла.

Можно было бы привести много доводов в пользу удобства определения элементарных мер одного рода через умножение готовых мер другого рода на соответствующие переменные множители. И действительно во всех тех случаях, с которыми имеют дело классический анализ, классическая механика и опирающиеся на них прикладные науки, такой подход к измерению физических величин возможен и с успехом применяется, позволяя производить все нужные вычисления. Но, как мы уже видели, когда шла речь об интеграле Стильтьеса, приемы классической математики не только не всегда наилучшим образом соответствуют сути дела, но даже не всегда позволяют решать такие проблемы, как проблема измерения, во всем их объеме. Так обстоит дело и здесь: нетрудно привести примеры физических величин, измерение которых невозможно свести к сложению элементарных мер только что описанного нами типа.

Одной из таких величин может быть уже длина кривой. Классическая математика сводит вычисление длины кривой к интегрированию, но это возможно только в тех случаях, когда в каждой точке кривой существует определенная касательная и притом касательная, направление которой меняется плавно, без внезапных скачков. Однако известны кривые, касательные к которым так резко и часто меняют свое направление, что попытка определить длину этих кривых при помощи интегрирования заранее обречена на неудачу. Между тем, если отказаться от таких элементов длины кривой, которые используются при интегрировании, т. е. от элементов длины, которые получаются умножением некоторой аддитивной функции области на обыкновенную функцию, то длина всякой кривой может быть определена очень просто.

Разделим кривую на части и, взяв каждую часть в отдельности, соединим оба ее конца прямолинейным отрезком. Пусть длины таких отрезков будут l_1, l_2, l_3,.. Составим сумму $l_1+l_2+l_3$... Предел таких сумм, получаемых при дроблении кривой на все более и более мелкие части, и будет длиной кривой.

Здесь элементом длины кривой служит длина прямолинейного отрезка, опирающегося обоими своими концами на кривую. Длина такого отрезка является очевидно вполне определенной функцией частей кривой, но функцией не аддитивной. В самом деле, возьмем часть кривой ab и соответствующий прямолинейный отрезок ab; затем разделим взятую часть кривой на две части ac и cb и возьмем соответствующие прямолинейные отрезки ac и cb. Очевидно, что длина прямолинейного отрезка ab не будет равна сумме длин прямолинейных отрезков ac и cb; действительно все три отрезка ab, ac и cb образуют треугольник, а в треугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин двух других сторон.

Итак, вполне законное желание ввести и такие измерения, как это измерение длины, в сферу интегрирования требует еще более ши-

рокой, чем все приводившиеся ранее, концепции интеграла как предельного суммирования величин. Первые шаги в создании такой концепции интеграла сделали в Америке Моор (1922) и Смит (1925), окончательно же она разработана в Москве А. Н. Колмогоровым в истекшем академическом году. Здесь в определение интеграла входят суммы уже наиболее общего вида:

$$J(D_1) + J(D_2) + (JD_3) + \ldots,$$

и обозначается он так:

$$\int_D J\,(dD).$$

Во всех без исключения упомянутых нами определениях интеграла, когда речь идет о тех или иных величинах, слово величина понимается в смысле обыкновенного вещественного числа. Однако поскольку при интегрировании используются лишь очень немногие свойства величин, можно было бы ожидать, что эти определения интеграла будут годиться и для величин в широком смысле этого слова, т. е. для векторов, матриц и т. п. Но оказалось, что это не так.

Существуют величины, для которых даже широкий путь определения интеграла, намеченный в работах Моора и Смита, еще не приводит к желательным результатам. И поэтому определение интеграла пришлось еще раз переработать и обобщить, что и удалось сделать автору настоящей статьи в текущем году.

IV

Для тех, кто знаком с математическим анализом и терией функций, вероятно небезынтересно было бы ознакомиться в общих чертах с тем, как были преодолены чисто математические трудности при описанных нами обобщениях понятия интеграла.

Коши при определении интеграла имел в виду только непрерывные функции. Для непрерывных же, как и для некоторых разрывных функций, при подразделении отрезка ab на все более мелкие части ax_1, x_1x_2, x_2x_3,.., суммы вида

$$\varphi_1\overline{ax_1} + \varphi_2\overline{x_1x_2} + \varphi_3\overline{x_2x_3} + \ldots$$

всегда имеют определенный предел, который и является интегралом.

Для прочих разрывных функций, для которых такого определенного предела нет, приходится подразделять отрезок ab не на отрезки же, а на более тонкие и сложные множества точек D_1, D_2, D_3..., от которых требуется только то, чтобы они имели определенную меру $m(CD_1)$, $m(D_2)$, $m(D_3)$,.., и следовательно составлять суммы вида:

$$\varphi_1 m(D_1) + \varphi_2 m(D_2) + \varphi_3 m(D_3) + \ldots$$

Здесь положение таково: каждый ряд подразделений отрезка на части либо приводит к определенному пределу для написанных сумм, либо нет; но все те ряды подразделений, которые приводят к определенному пределу, могут приводить лишь к одному и тому же пределу: последний и является интегралом.

Лебэг указал регулярный процесс для разыскания такого предела.

В интеграле Радона, где вместо меры $m(D)$ может фигурировать любая другая, но обязательно аддитивная функция множества $f(D)$, дело обстоит точно так же.

В частности регулярный процесс Лебэга здесь также применим.

Процесс Лебэга заключается в следующем. Множества D_1, D_2 D_3... выбираются не наугад, а так, чтобы на каждом из них в отдельности значения функции φ отличались друг от друга не больше, чем на некоторое определенное число ε. Достигается это очень просто. Предположим для простоты, что все значения функции не выходят за определенные пределы A и B, т. е. что вообще $A<\varphi<B$. Тогда можно принять за множество D_1 как раз множество тех точек, в которых значения функции φ не выходят за пределы A и $A+\varepsilon$; за множество D_2—как раз множество тех точек, в которых значения функции φ не выходят за пределы $A+\varepsilon$ и $A+2\varepsilon$ и т. д. вплоть до B. При следующих подразделениях области интегрирования поступают точно так же, но берут меньшее число ε. Переходя от подразделения к подразделению, выбирают числа ε так, чтобы они стремились к нулю. Благодаря этому значения функции в каждой отдельной части подразделения становятся все более близкими между собой. Дело обстоит здесь так же, как и при интегрировании непрерывных функций по Коши, и, пробегая наш ряд подразделений, мы приходим к определенному пределу для составляемых нами сумм произведений $\varphi m(D)$. А так как другие ряды подразделений не могут приводить к другим пределам, то тем самым мы и получаем окончательное определение интеграла, избегая необходимости разыскивать наугад приводящие к нему подразделения.

При замене же произведения $\varphi m(D)$ произвольной неаддитивной функцией множества $f(D)$ теряется то свойство рядов подразделений, что, если они приводят к определенному пределу иля сумм$f(D_1)+f(D_2)+f(D_3)+\ldots$, то обязательно—к одному и тому же пределу. Поэтому здесь между рядами подразделений предварительно устанавливают некоторый порядок: говорят, что подразделение Δ_2 следует за подразделением Δ_1, если каждая из частей области интегрирования, входящая в состав подразделения Δ_2, целиком входит в одну из частей области интегрирования, входящих в состав подразделения Δ_1; и говорят, что ряд подразделений Δ_{21}, Δ_{22}, Δ_{23}... следует за рядом подразделений Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{13}..., если подразделение Δ_{21} следует за Δ_{11}, Δ_{22} за Δ_{12}, Δ_{23}, за Δ_{13} и т. д. Оказывается, что если существует такой ряд подразделений, что не только он, но и всякий следующий за ним ряд приводит к определенному пределу для написанных выше сумм, то и всякий иной ряд подразделений, приводящий вместе со всеми следующими за ними рядами к определенному пределу, может приводить лишь к тому же самому пределу: это и будет искомый интеграл.

Наконец, когда речь идет не о вещественных числах, а о более общих величинах, то приходится прибегать не к подразделению области интегрирования на части, а к выделению из нее группы частей, и лишь при составлении рядов таких групп следить за тем, чтобы эти группы постепенно охватывали всю область интегрирования.

М. Выгодский

ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕТОДОЛОГИИ МАРКСИЗМА [1]

«История науки может сама стать наукой лишь в том случае, если она стремится извлечь из необозримого обилия единичного то, что это единичное определяет; если она стремится в действительном познать необходимое». Этими словами начинает Герман Ганкель свой труд по истории математики [2].

Более полувека прошло с тех пор, как были написаны эти слова. В промежуток времени, который нас отделяет от появления работы Ганкеля, история математики имела в рядах своих представителей крупнейших специалистов, соединявших остроту ума с блестящей эрудицией. Назовем хотя бы имена Таннери, Цейтена, Кантора, Лориа, напомним о той гигантской работе по собиранию материалов, их критической обработке, переводу и опубликованию, которая была проделана этими учеными и рядом других.

Но спросим себя: можем ли мы сказать сейчас, что история математики является ныне наукой в том смысле, который содержится в приведенных выше строках Ганкеля?

К великому сожалению, мы должны будем дать ответ мало утешительный. Мы должны констатировать, что наша наука еще не вышла из стадии изучения — правда, тщательного и неустанного — единичных явлений. Было бы неверно сказать, что в лице отдельных своих представителей история математики не пыталась подняться на более высокую ступень и проникнуть в закономерные связи отдельных событий. Но эти попытки не могут нас удовлетворить. Это я прежде всего постараюсь показать в своем докладе. Но я хочу также попытаться вскрыть причины неудачи этих попыток и хотя бы в самых общих чертах наметить пути, которые, на мой взгляд, ведут к желанной цели и которые открываются для исследователя, стоящего на точке зрения марксизма.

Линия развития истории математики за последние полвека может быть охарактеризована словами того же исследователя, цитатой из которого я начал свой доклад. В присущем ему образном стиле, он продолжает свою мысль о закономерности процесса истории развития

---

[1] Доклад, прочитанный 27 июня 1930 г. на I Всесоюзном съезде математиков.

[2] Hankel H., Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 1.

науки таким художественным сравнением: «Как ни широка свобода единичного действительного (wie weit auch die Freiheit des einzelnen Wirklichen gehen mag), она не уничтожает закона течения процесса в целом; водопад сохраняет свою форму, как бы ни было случайным движение каждой его капли».

Здесь, казалось бы, автор должен был бы сказать нам, какова природа исторической закономерности, какими силами управляется бурное течение водопада исторических событий, какие факторы имеют решающее значение для направления, в котором развивается наука: ограничена ли—и если да, то чем—«свобода» движения единичных капель в общем потоке.

Но вместо того, чтобы хотя бы наметить пути решения этих общих вопросов, автор повергает читателя в уныние. «Но если даже для такого чисто механического процесса человеческий дух не в состоянии установить законы движения, то как же способен он теоретически построить картину исторического прогресса, как способен он в развитии усмотреть категории причины и следствия? Таким образом не остается ничего иного, как представить картину прошлого в её общих очертаниях, а вышеупомянутые необходимые законы развития духа выявлять в подчеркивании существенного и в четкой характеристике поворотных пунктов развития».

Таков неутешительный итог Ганкеля. И мне кажется, что в нем заключена как бы программа дальнейших работ по истории математики. Всякий, знакомый с капитальнейшим современным трудом по истории математики—я имею в виду четырехтомник Кантора [1],—согласится с тем, что и эта довольно скромная программа (подчеркивание существенного и четкая характеристика поворотных пунктов развития) не может еще считаться выполненной.

Более того, я позволю себе усомниться и в том, является ли эта программа выполнимой при наличии сознательного отказа исследователя от проникновения в причинно-следственные связи исторического процесса. В самом деле, стремясь к выделению существенного, разве не должен я обладать некоторым критерием для распознания того, что является существенным в процессе развития науки? И возможно ли установление этого критерия, если я откажусь от попытки понять процесс в целом как от попытки, заранее обреченной на неудачу? Точно так же обстоит дело и с характеристикой переломных пунктов развития. Может ли быть четкой эта характеристика, если не познана «прагматическая» обусловленность самого перелома?

Итак в современном своем состоянии история математики еще не имеет права носить имя науки в полном смысле этого слова, и причиной этому служит то обстоятельство, что историки математики не хотели или не могли в своей работе руководствоваться целостным историческим методом, методом, который позволял бы в сложном клубке единичных фактов отыскивать необходимо обусловленные закономерности. Таким целостным историческим методом обладает марксизм. Но на точку зрения марксизма не могли стать ни Ганкель,

[1] Gantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik

ни Кантор; не могли потому, что принятие марксизма неразрывно связано с признанием революционной доктрины научного социализма; признание марксизма означает разрыв с господствующим общественным строем и господствующим образом мышления. Такой разрыв оказался невозможным для историков математики—так же как и для большинства ученых капиталистических стран—не только и не столько из-за препятствий материального характера, сколько вследствие того идеологического пленения, в котором пребывает всякий, воспитанный культурой буржуазии, и которое преодолеть могут лишь единичные личности.

Никакое историческое исследование немыслимо без кропотливого изучения деталей, без глубокого погружения в источники, часто покрытые толстым слоем пыли веков. Но для плодотворности этого поистине героического труда необходимо, чтобы исследователь имел целью воссоздать из добытых частей картину целого. Когда речь идет об истории частной науки, нас должен интересовать прежде всего вопрос о путях ее развития, вопрос о причинах, его обусловливающих, вопрос о тех силах, которые определяют линию развития науки.

Для идеалиста эта линия определяется законами саморазвития духа, и под прямым или косвенным влиянием идеалистического мировоззрения в тех или иных его оттенках находятся и крупнейшие историки математики. Для них отыскание исторической закономерности сводится к констатированию тех или иных особенностей «духа народа»; различные тенденции развития науки характеризуются различными «складами ума»; преобладание той или иной научной дисциплины объясняется склонностью или несклонностью, любовью или нелюбовью, присущей данной нации. Позвольте привести несколько примеров.

Свой фундаментальный труд по истории греческой математики [1] сэр Томас Гис начинает кратким обзором ее достижений. Он считает удивительным тот факт, что при скромных средствах исследования греки получили большое количество прекраснейших результатов в «невероятно короткий» промежуток времени. И он спрашивает, как могло это произойти?

«Ответ на этот вопрос,—говорит Гис,—состоит в том, что математический гений греков был одним из проявлений их философского гения... Все люди по природе любознательны, говорит Аристотель. Греки обладали любовью к знанию ради знания в большей степени, чем какой-либо другой народ древности. У них эта любовь была инстинктом, страстью. Об этом свидетельствует прежде всего их любовь к приключениям. Характерно, что Одиссею воздается слава, как герою, который посещал чужие страны и изучал их нравы, рискуя часто своей жизнью, ради чистой страсти к расширению своего горизонта».

Гис указывает еще на два фактора, способствовавшие развитию греческой науки. Первый—это «необычайная способность греков к

[1] Heath Th., History of Greek Mathematics, Oxford 1921, p. 1—10.

точным наблюдениям» [1], проявившаяся в их астрономических работах. «Второй, еще более важный факт—это то, что греки были р а с о й м ы с л и т е л е й. Для них недостаточно было знания факта (ὅτι); им нужно было знать почему (διά τι) этот факт имеет место. И греки не останавливались до тех пор, пока они не оказывались в состоянии дать факту или явлению рациональное объяснение или такое объяснение, которое им казалось рациональным» [2].

Таковы исторические взгляды крупнейшего современного специалиста. Они кажутся наивными с точки зрения исторического материализма. Но мы не можем ограничиться такой их квалификацией и пройти мимо них. Мы не должны забывать о том, что с этой точки зрения Гис и целый ряд других ученых подходят (и не могут не подходить) к оценке и расположению фактического материала. Мы не должны забывать, что этой точкой зрения обусловлен выбор тех гипотез, без которых вряд ли возможно реконструировать картину развития греческой математики. И потому эта картина под кистью марксиста-историка должна иметь совершенно иной облик. По-новому должен предстать фактический материл, по-новому придется устанавливать степень достоверности источников, по-новому отнестись к исторической традиции.

С точки зрения марксизма путешествия греков в далекие страны имеют причиной вовсе не присущую им по природе любознательность или страсть к приключениям, а прежде всего и раньше всего те торговые, преимущественно посреднические операции, которые делали необходимыми дальние плавания, точные астрономические наблюдения и самую «любовь к путешествиям». Эту последнюю мы наблюдаем всюду и везде, где существуют «заморские» торговые связи—у предприимчивых венецианцев, у финикиян, у соплеменников сэра Гиса. И если одаренность греков как расы и являлась фактором, способствующим развитию и процветанию науки, то не ее во всяком случае нужно считать и с т о ч н и к о м прогресса математики.

Было бы неверно сказать, что все историки математики склонны к идеалистическому пониманию исторического процесса, хотя, мне кажется, можно сказать, что оно является преобладающим и что материалистические тенденции, которые мы можем констатировать у ряда авторов, недостаточно последовательны. Последнее обстоятельство находит себе объяснение в том, что хотя авторам этим присуще стремление понять развитие науки как продукт исторических условий жизни общества, однако им недостает той целостной и последовательной материалистической теории исторического процесса, которую, как я уже указывал, дает марксизм.

Разрешите мне обрисовать здесь некоторые исторические построения одного из самых остроумных и проницательных исследователей истории нашей науки; критический их разбор должен будет служить подтверждением сказанного.

---

[1] Ibid., p. 5.
[2] Ibid., p. 6.

В своей работе, посвященной преимущественно истории античной математики [1], Цейтен рассматривает вопрос о причинах расцвета греческой математики в Александрийскую эпоху и о причинах ее упадка. Он указывает на то обстоятельство, что александрийские ученые получили возможность посвятить свою жизнь науке, не будучи принужденными заботиться о средствах к существованию, которые им были обеспечены царями Птоломеевской династии. Эти материальные условия способствавали прежде всего развитию системы лекционного преподавания. Только последнее делало возможным изложение и усвоение геометрических доказательств, в которых нынешним нашим алгебраическим операциям соответствовали операции над отрезками и площадями. Операции эти легко производились изустно, но следить за ними при чтении написанной книги было чрезвычайно трудно при отсутствии разработанной символики. Наконец Цейтен считает, что лишь в обстановке длительного мирного развития возможна была спокойная работа математиков. Таковы, по мнению Цейтена, обстоятельства, способствовавшие расцвету математики в Александрийский период. Соответственно этому и причины упадка ее Цейтен усматривает прежде всего в уничтожении тех материальных условий, которые способствовали ее расцвету [2]: при последних Птоломеях ученые оказались в худших материальных условиях, чем при первых царях этой династии. Римляне оказались еще менее склонными к субсидированию чистой науки. Устное обучение прекратилось, а понимание написанных работ затруднялось, благодаря тяжелой форме изложения. Тяжелая форма изложения была вызвана стремлением к непрерывной строгости, благодаря которому изгонялось все то, что могло способствовать легкому обозрению целого. И наконец внутренней причиной упадка послужил отрыв чистой математики от ее практических приложений, который вытекал из того же стремления исключить из области науки все, что казалось недостаточно строгим [3].

Я вынужден был ограничиться этим сжатым пересказом исторической концепции Цейтена, так как дословный перевод отнял бы гораздо большее время. Но я думаю, что позиция нашего автора уже достаточно обрисована.

Мы должны прежде всего констатировать стремление увидеть материальные причины развития и упадка александрийской математики. Здесь нет места апелляции к любознательности греков и к расовой склонности их к абстрактному мышлению. Выводы автора, представляющие результат его многолетних трудов и изложенные им в этой и в ряде других работ,—выводы эти в значительной своей части представляют несомненный успех в деле материалистического истолкования истории математики. Приходится пожалеть о том, что ни одна

[1] Zeuthen H., Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Работа эта недавно вышла новым немецким изданием (оригинал датский). Я пользуюсь французским изданием (Zeuthen H., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, Paris 1902).

[2] Zeuthen H., Histoire de mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, Paris. 1902, p. 24.

[3] Ibid., p. 201—203.

из работ Цейтена не издана в Советском союзе, хотя они по своей популярности и по своей научности стоят гораздо выше тех работ по истории математики, которые изданы у нас на русском языке в послереволюционные годы.

Однако с точки зрения марксизма концепция Цейтена не может быть признана достаточно отчетливой. Несомненно, что при прочих равных условиях мирное развитие общества позволяет использовать большую сумму материальных благ для культурных целей. Но в том-то и дело, что обстановка мира или войны слишком тесно связана со всей обстановкой хозяйственной жизни для того, чтобы ее можно было рассматривать как самостоятельный фактор. В частности, можно указать на целый ряд фактов в истории нашей науки, свидетельствующих о том, что решающий прогресс ее происходит именно в военной обстановке. XVI и XVII вв.—эпоха зарождения новой математики—есть эпоха великих войн, и можно сказать, что потребности военного дела имели не малое влияние на развитие математики (через практические задачи артиллерийского искусства). Вспомним, что если Евклид и Аполлоний наслаждались мирной жизнью под сенью птоломеевского трона, то Архимед не только жил в обстановке военных бурь, но и сам был активным организатором обороны Сиракуз. Вспомним наконец, что великие потрясения, вызванные революцией 1789 г. во Франции, не повлекли за собой упадка французской математики, что Лазарь Карно и Гаспар Монж были одновременно «генералами от революции» и «генералами от математики».

Таким образом, если мы хотим познать более глубокие причины развития и упадка греческой математики Александрийского периода, то мы должны будем обратиться к исследованию более глубоких исторических корней, а такое исследование возможно лишь при пользовании методом исторического материализма, который представляет ныне единственную последовательно-материалистическую теорию исторического процесса.

Если бы я был в состоянии изложить вам историю «золотого века» греческой математики с точки зрения марксизма, то была бы излишней постановка доклада в той общей форме, которая намечена его темой, и если бы я заявил вам, что мы подошли вплотную к разрешению этой и целого ряда других проблем, то это было бы профанацией марксизма, основное требование которого состоит во всестороннем изучении конкретной обстановки со всеми ее многообразными связями, который не допускает жонглирования универсальными схемами с целью выдавливания из них «объяснений» всего, что происходит или происходило когда-либо; выполнение указанного требования невозможно без коллективной работы специалистов по отдельным дисциплинам: должны быть учтены данные истории, археологии, истории естествознания и истории техники, истории искусства, филологии и т. д. Совершенно очевидно, что совместить эти специальные знания не под силу одному лицу и что в короткий промежуток времени не может быть наново проделана работа многих десятков и сотен исследователей, систематизировавших материалы первоисточников

в течение более полувека, а работа эта в значительной мере должна быть проделана сызнова,—материал должен быть приведен в иную систему, отличную от созданной мыслителями капиталистического мира. Но эта работа по существу еще на начата.

Вот почему, я надеюсь, вы не поставите мне в вину то, что я не могу взять на себя непосильную задачу решения вопроса о причинах развития и упадка александрийской математики. Напротив, задачу своего доклада я вижу в том, чтобы направить ваше внимание на марксистскую разработку проблем истории математики.

Все же я позволю себе наметить те пути, которые, быть может, приблизят нас к решению проблемы. При оценке причин развития математики в эпоху Евклида—Аполлония мы должны конечно учесть то наследие, которое получила она от греческой математики V и IV вв., развивавшейся в условиях, отличных от условий Александрийской эпохи. При отсутствии этого наследия мы конечно не могли бы иметь расцвета абстрактной науки в Александрии. Но для того, чтобы понять историческую необходимость того направления, той формы, того стиля, которые характерны для Евклида и его школы и которые действительно были одной из причин упадка математики при изменившихся внешних обстоятельствах,—для этого мы должны посмотреть, на какой почве взросли семена греческой культуры в Александрии. Для этого в свою очередь нужно знать, какие социальные группы были носителями культуры в эту эпоху. И если оказывается, что господствующая социальная группа представляет собой класс, оторванный от непосредственного участия в производстве материальных благ, если, с другой стороны, процесс производства этих благ есть процесс, чуждый технического прогресса, если этот процесс производства опирается на традиционные методы, то необходимым историческим следствием является то, что абстрактная наука порывает связь с практикой; она может и должна игнорировать эту связь и считать ее недостойной науки. Вот где следует искать причину той сугубой академичности, которая веет на нас с древних страниц евклидовых «Начал». В этих условиях наука может существовать действительно лишь при «мирном» процветании. В этих условиях самое ее существование поставлено в зависимость от целого ряда случайных обстоятельств, вплоть до, может быть, благоволения или недоброжелательства монарха. В этих условиях научные деятели служат удовлетворению «эстетических» потребностей высших классов общества, где воспитание в духе эллинской культуры есть один из признаков высокого общественного положения и хорошего тона.

За то, что эта картина соответствует действительности, говорит—тот факт, что в эпоху упадка одна ветвь математики продолжает развиваться: это тригонометрия, единственная отрасль математики, у которой связь с практикой не была разорвана[1]. Через посредство астрономии тригонометрия (по преимуществу сферическая!) обслужи-

[1] Если кульминационный пункт развития геометрии приходятся повидимому на вторую половину III в. до н. э. (Аполлоний), то кульминационный пункт развития «сферики» следует отнести к концу I в. н. э. (Менелай). Таким образом эти два момента разделяют не менее 300 лет.

вала потребности мореплавания. И если «сферика» и рассматривалась как часть астрономии, а не математики (и именно потому, что не считалось достойным точной науки оперировать приближенными вычислениями), то тем не менее по своим методам она не могла не быть абстрактной математической дисциплиной.

Повторяю еще раз, что предлагаемая мною концепция есть лишь первая (и разумеется недостаточная) попытка применения марксистского метода к решению конкретной исторической проблемы.

Но из нее, мне кажется, можно усмотреть некоторые черты, характеризующие методологические особенности, отличающие марксизм не только от идеалистических, но и от стихийно-материалистических течений, с одним из которых мы познакомились при оценке взглядов Цейтена.

Я уже сказал, что ничто так не противоречит духу марксизма, как сочинительство теорий, игнорирующих конкретную действительность и черпающих свою мудрость из голых схем. Но отсюда отнюдь не следует, что марксист должен игнорировать общие законы развития общества, которые являются результатом обработки многочисленных исторических фактов и которые составляют так сказать душу марксизма. Напротив, они-то и являются руководящим началом в историческом исследовании. Явившись р е з у л ь т а т о м обработки исторического материала, они становятся теперь п р е д п о с ы л к о й каждого отдельного исследования.

Вот почему я считаю себя вправе остановить ваше внимание на некоторых о б щ и х п р о б л е м а х истории нашей науки, осветив их с точки зрения марксизма.

Первая проблема, о которой я буду говорить, могла бы быть названа проблемой с в я з и м а т е м а т и к и и к у л ь т у р ы.

Это несколько расплывчатый термин. Но дело ведь не в термине, а в содержании. Содержание же проблемы можно формулировать так: от каких факторов зависит развитие математики и какова мера влияния того или иного из них. Какую роль в частности играют в развитии математики ее внутреннпе потребности, каково историческое влияние так называемых «идеальных» мотивов исследования, его субъективного стремления к познанию истины и к приведению науки в совершенную систему.

Марксист отнюдь не может отрицать наличия этих «идеальных» моментов, а следовательно и их влияния на развитие науки. Но марксист не может приписать им решающей роли в историческом процессе. Прежде всего, сами эти «идеальные моменты» отнюдь не являются внеисторическими. В различные эпохи идеалы исследователей различны; они представляют собой идеалы общественных классов и групп, а не продукт саморазвивающегося духа. Поэтому, если бы даже допустить, что желания исследователей делают историю науки, то все же решающую роль имеет вопрос о том, что обусловливает эти желания. Но далее есть еще другой вопрос: что дает идеальным стремлениям исследователя возможность претвориться в науку; каким образом и при каких условиях индивидуальное творчество становится достоянием человеческой культуры?

Марксистская точка зрения обязывает нас к тому, чтобы искать ответ на этот вопрос в исследовании производительных сил эпохи, в изучении производственных ее отношений и тех проявлений духовной жизни человека, которые воздвигаются над ними, в их взаимной связи и в их обратном влиянии на производственную основу существования общества. Само собой разумеется, что не может быть речи о том, чтобы для каждого отдельного события в математике искать его корни в практических задачах: целый ряд воздвигнутых на материальной базе культурных «надстроек»—в том числе и верхушечных, как философия и даже религия—оказывают свое влияние на науку и порой очень значительное. В анализе всех этих перекрещивающихся влияний и состоит трудность каждой конкретной проблемы. Но было бы ошибочно заключить, что необходимость учесть влияние «духовных» факторов притупляет острие марксизма, что этим сглаживаются те характерные черты, которые отличают марксистскую концепцию от всех буржуазных исторических теорий.

Чтобы совершенно отчетливо представить невозможность примирения этих точек зрения, я приведу несколько характерных мест из произведений историков математики.

Я начну с книги М. Симона «История математики в древности в связи с историей античной культуры» [1]. Первые главы этой книги касаются математики народов Древнего Востока. Это увлекательно написанные очерки, в которых читатель действительно видит, что математика неразрывно связана с материальной жизнью и деятельностью людей. Но, переходя к математике греков, мы наблюдаем совершенно иную картину: развитие греческой математики представлено как логически развертывающаяся история идей, и не только обусловленности, но и какой-либо связи с материальным миром мы стали бы напрасно здесь искать. И это вовсе не случайно, ибо для Симона культура вовсе не есть продукт материальных отношений людей к природе и друг к другу. «Под культурой,—говорит он,—мы должны понимать нечто отличное от преодоления грубой энергии природы на пользу нашим силам. Культура есть гораздо большее. Беспроволочная телеграфия, рентгеновы лучи, воздухоплавание, вовсе не составляют культуры. Сущность культуры состоит в высвобождении этических ценностей» [2].

Несколько далее мы найдем расшифровку этой формулы: «Культура и культ это не только словесно близкие понятия—религия и по сей день есть единственная форма, в которой этические достижения философии могут быть полезны народу. Математика развивается в тесной связи с религией: храм должен быть ориенитрован, собственность, охраняемая божеством, должна быть ограждена и измерена. Математика стоит в прямой связи с поэтической фантазией и прекрасным» [3]. Я умышленно взял в лице Симона резко выраженного идеалиста.

[1] Simon M., Geshichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, Berlin 1909.
[2] Ibid., S. 376.
[3] Simon M., Geschichte der Mathematik im Altertum, S. 377.

Я отнюдь не хочу сказать, что под его заявлениями подпишется всякий историк математики. Но я думаю, что тот, кто хочет отрицать материалистическое понимание истории культуры, должен стать на точку зрения Симона, если он будет последовательным.

Однако как же объяснить различие между подходом Симона к математике Древнего Востока и его трактовкой математики греков. На этот вопрос мы получаем ответ от проф. Г. Н. Попова.

«Если практика, как показывает история, и ставила задачи,—говорит Попов,—то развитие математики на этой почве под преобладающим влиянием утилитаризма совершалось только в первой стадии накопления научного материала, когда об идеальных целях и стремлениях науки не могло быть и речи. Чем тоньше становилось интеллектуальное развитие, чем больше человек овладевал способностью к дедукции, освобождаясь от пут грубого эмпиризма, тем ярче вырисовывались цели познания и тем интенсивнее работал человеческий ум в направлении возможного совершенствования начал науки безотносительно к их применимости» [1].

Нельзя отрицать, что творческая мысль исследователя гораздо более связана на первой стадии накопления научного материала, но и этот факт целиком объясняется материальными условиями жизни человечества. Но проф. Г. Н. Попов хочет сказать больше. Он полагает (я цитирую другое место его труда), что «материальная культура находится в прямом подчинении у культуры духовной, и обособлять ее допустимо разве с точки зрения удобства исследователя» [2]. Мы видим таким образом, что признание марксизмом влияния «культурных» факторов на развитие математики отнюдь не сглаживает различия мировоззрений, ибо идеалистическая концепция требует, чтобы между практикой и теорией, между материальной и духовной жизнью были установлены отношения подчинения,—и притом обратные тем, какие существуют в действительности. Впрочем, эта непримиримость отчетливо сознается нашими идейными противниками. «Трактовать о значении математики с точки зрения экономического материализма,—говорит Г. Н. Попов,—значило бы проявить непростительную узость» [3].

Может быть, возникнет у кого-либо из присутствующих здесь вопрос, не составляют ли цитированные мною авторы исключения в ряду историков нашей науки? К сожалению, это не так.

Может быть, идеалистическое понимание проблемы связи математики с культурой высказано этими авторами в такой резкой форме, в которой оно не встретится у других, но по существу позиция их представляет течение, господствующее в истории математики.

Капитальный труд М. Кантора знаменует собой кульминационный пункт буржуазной историографии. Миновать его не может ни один исследователь и, насколько мне известно, он никогда не подвергался методологической критике. И действительно может показаться на пер-

[1] Попов Г. Н., История математики, Москва 1920, с. 41.
[2] Там же, с. 79.
[3] Там же, с. 79.

вый взгляд, что труд Кантора есть лишь объективная сводка документов, своего рода историко-математический кодекс. В самом деле, у Кантора вы не встретите методологических рассуждений, подобных предыдущим. Но этой методологией проникнута изнутри вся его поистине гигантская работа.

И проблема связи математики с культурой для Кантора не ставится иначе, чем для Симона и Г. Н. Попова.

Глава 57 книги Кантора посвящена Луке Пачиоло, итальянскому математику конца XV и начала XVI в., деятельность которого, подобно деятельности других математиков этой эпохи, была посвящена не только проблемам «чистой» науки (которая как таковая существовала тогда пожалуй единственно в виде богословия), но и ее приложениям. Лука Пачиоло не только вычислитель и алгебраист; он является также автором первого (из известных) сочинения по теории двойной («итальянской») бухгалтерии.

В своей большой работе [1] Пачиоло, наряду с задачами арифметическими и алгебраическими, дает и правила коммерческих вычислений. Кантор посвятил Луке Пачиоло 38 страниц. Он дает исчерпывающие сведения о содержании трактата, излагая решение целого ряда задач, но как только доходит до вопросов, не имеющих чисто математического характера, он ограничивается кратким упоминанием о них. Так, излагая содержание той части работы Пачиоло, где речь идет об исчислении процентов, о переводе одних монетных единиц в другие и т. д., Кантор замечает: «Для истории итальянской торговли и торговли вообще шесть первых трактатов этого 9-го раздела могут служить богатым источником, который может быть еще недостаточно использован. Истории математики вряд ли стоит останавливаться на них» [2].

Заявления такого рода мы встретим у Кантора десятки раз, и они вытекают из того, что для Кантора история математики есть наука о развитии математики как таковой. Ее связь с другими явлениями культурной жизни, скажем с торговлей (а тем более ее зависимость от материальных условий), для него не более, чем случайное обстоятельство.

Так, в гл. 36 той же работы мы читаем об арабской математике следующее: «С полным правом было обращено внимание (Ганкелем) как на характерный признак арабской математики на тот факт, что она полностью зависела от вкуса князей; при тех владетелях, которые обнаруживали пристрастие к астрономии, появились астрономы и математики, в противном случае их не было» [3].

Здесь я имею повод обратиться к крупнейшему современному историку математики Джино Лориа. В последний своей, вышедшей в прошлом году работе [4], он так говорит о появлении арабов на исторической

[1] Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita.
[2] Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II, Leipzig, 1913, S. 325.
[3] Ibid., S. 693.
[4] Loria G., Storia delle matematiche, v. I, Torino, 1929, p. 327.

сцене (гл. XI носит название «Арабское чудо»): «Среди событий всемирной истории ни одно не возбуждает большего любопытства и не производит большего впечатления, чем то, которое являет нам арабский народ, поолинный метеор, который, появившись внезапно на грани VI и VII столетий, сиял ослепительным светом, но спустя немногие века, померк, как бы исчерпав ту скрытую энергию, которой его одарила природа. Этот народ, который доселе не оказывал никакого заметного влияния на развитие человечества, повинуясь непреодолимому зову Магомета, открыл в себе те чудесные прирожденные качества, которые дали ему возможность в течнние нескольких столетий господствовать телесно и духовно».

Это объяснение не нуждается, после всего изложенного, в комментариях.

Теперь, я думаю, показано достаточно ясно, что проблема связи математики с культурой стоит для нас, марксистов, совсем по-другому, чем для крупнейших представителей современной истории математики, и что поэтому мы должны поставить перед собой задачу коренной перестройки истории математики.

В исторической картине развития нашей науки материальным условиям жизни человечества должно быть отведено то место, которое они имеют в действительности.

Математику мы должны рассматривать как составную часть совокупного продукта человеческого сознания, порождаемого общественным бытием человека. Мы не должны вырывать развития математики из общей картины исторического развития. Чем выше ступень развития науки, тем более настоятельной становится необходимость понять ее историю в неразрывной связи с историей общества, ибо чем бо́льшей становится свобода исследователя, тем с бо́льшей уверенностью мы можем утверждать о необходимости течения процесса в целом.

Чем выше стадия развития нашей науки, тем многообразнее (но и тем сложнее) делаются ее связи. Раскрытие этих связей в их конкретности есть задача историка-марксиста.

Если по отношению к первой проблеме мы могли констатировать существование двух диаметрально противоположных ей решений, то вторая проблема, о которой я хочу говорить, существует как таковая только для марксистов. Для всех течений и оттенков буржуазной науки—начиная от последовательно идеалистических до «стыдливо-материалистических»—эта проблема не существует вовсе. Я говорю о проблеме классовой природы науки вообще, математики в частности.

Положение о том, что в классовом обществе наука отражает интересы классов, в нем борющихся,—это положение доказано основоположниками марксизма по отношению к философии, истории политической экономии, словом для тех наук, которые называют науками гуманитарными. В отношении теоретического естествознания многое сделано работами Энгельса и Ленина. Но в отношении математики проблему эту ни в коей мере решенной считать нельзя.

Основная трудность состоит здесь в том, что математика, по крайней мере на первый взгляд, представляется наукой, оперирующей положениями, обладающими максимальной степенью достоверности; что математические истины представляются истинами в последней инстанции; что на каждый вопрос—если он поставлен достаточно определенно—повидимому может быть дан только один ответ.

Все это однако указывает лишь на то, что классовые элементы в математических теориях не столь очевидны, как в других теоретических дисциплинах. Как раз в последнее время мы имеем в математике никем не отрицаемый кризис, и притом кризис ее основ, и сейчас мы имеем все основания сомневаться в возможности однозначного ответа на каждый поставленный вопрос. Не различие в устройстве мозга у спорящих сторон обусловливает этот кризис. Его причины следует искать в моментах социального порядка. Этим я отнюдь не хочу сказать, что одна группа математиков защищает, скажем, интересы промышленников, а другая—интересы аграриев. Нет, такое утверждение было бы злейшей пародией на марксизм. Но, прослеживая развитие идеологии общества, мы должны будем в его классовой структуре найти корни различных течений философской мысли, различных мировоззрений и их оттенков. Эти мировоззрения то сталкиваются друг с другом в непримиримой вражде, то причудливо переплетаются во всевозможных формах компромисса. А когда то или иное мировоззрение утверждается и консолидируется, то с точки зрения этого мировоззрения происходит переоценка всех ценностей, и, разумеется, уже ранее достигнутые результаты служат исходным пунктом переработки, и самая необходимость переработки обусловлена тем состоянием, которого достигла наука к этому моменту. Новое рождается не на пустом месте, а на почве, взрыхленной столетиями предыдущих работ. И при анализе все эти обстоятельства должны быть учтены.

Задача марксистского исторического анализа и состоит в том, чтобы из этого переплетения влияний выделить элементы идеологического характера и указать обусловленность этих элементов тем или иным мировоззрением. Всякое же мировоззрение для марксиста есть продукт очень сложного взаимодействия, в котором скрытая, но определяющая роль принадлежит влиянию интересов общественных классов и групп.

Вы видите, что проблема эта—отнюдь не из легких, но это не уничтожает ее актуальности. Если мы хотим понять ту или иную эпоху в истории математики, мы должны этот анализ произвести. Для иных эпох это сделать легче, для других труднее, труднее всего это для современности. На повестке дня съезда стоит доклад С. А. Яновской, в котором она дает конкретный анализ некоторых течений современной математической мысли в их связи с философскими течениями.

Что касается меня, то я не считаю себя компетентным судить об этих очень специальных и трудных вопросах. Но в рамках моей темы будет пожалуй достаточно, если я ограничусь материалом, принадлежащим истории.

Я должен во избежание недоразумений оговориться, что я не претендую на решение поставленной проблемы, хотя бы в рамках одного

частного вопроса. Моя задача состоит скорее в постановке проблемы, чем в попытке ее решения.

Разве на развитие науки не накладывает отпечатка то или иное понимание задач науки, ее целей и методов, и разве это понимание не отражает мировоззрения, господствующего или идущего к господству? Разве не отражается на выборе математических проблем, подвергающихся исследованию, то или иное понимание задач и науки и ее идеалов? Разве требования, предъявляемые к математическому доказательству, не стоят в прямой зависимости от теоретико-познавательной и общефилософской установки? А если так, то можно ли думать, что история математики может игнорировать классовый момент в структуре самой математики?

Возьмем например вопрос о требованиях, которым должно удовлетворять доказательство.

Для Евклида идеальное доказательство есть доказательство формальное; для Клеро—идеальное доказательство есть доказательство, дающее очевидность, доказательство убеждающее. Теория пропорций Евклида неприемлема для Галилея, потому что она формальна. Определение равенства отношений, из которого исходит Евклид, он считает апелляцией к неочевидным свойствам пропорциональных величин. С таким же успехом, говорит Галилей, Евклид мог бы определить окружность как линию, обладающую свойством для каждой пары отрезков хорд, проходящих через точку внутри ее, давать постоянное произведение, и определение Галилей не может считать правильным.

Если мы хотим понять это различие в подходе к вопросам обоснования математики, мы должны учесть тот момент классовости науки, о котором я говорил. Как я указывал раньше, характерной чертой александрийской математики было то, что она культивировалась как объект утонченной духовной культуры, связи которой с производственным процессом были в значительной степени оборваны сложившимися историческими условиями. Исключительная забота о форме, доходящая до пожертвования в ее интересах содержанием науки (метрические проблемы геометрии), вполне соответствовала взглядам господствующего класса. Этот класс выставлял уже задолго до Евклида отчетливо высказываемое положение о том, что занятие практической деятельностью недостойно истинного ученого и философа. Мировоззрение это очень ярко и художественно было сформулировано Платоном [1].

В противовес этому философия XVII в. стоит на той точке зрения, что созерцание научной истины есть средство к познанию природы и покорению ее сил на пользу человека. Это—мировоззрение нового класса, идущего к уничтожению старого общественного строя. И оно совсем не безразлично для понимания структуры математики XVII в., для понимания путей ее развития. Борьба с евклидовым методом обоснования математики, возрождение метода неделимых, требование внесения «естественного» порядка в математику (Арно), требование очевидности математических определений и аксиом—все это несомненно

[1] Платон, Государство, 525 и след.

представляет собой проявление того склада мышления, который свойственен нарождающейся буржуазии.

Перехожу к третьей проблеме, тесно связанной с предыдущими двумя,—проблеме «исторической интерполяции». После всего сказанного я могу осветить ее в немногих словах. Я уже указывал на то, что наследие прошлого для всякой эпохи в истории математики, как бы революционна она ни была (а история нашей науки знает и революционные эпохи), служит отправным пунктом развития—представляет ли это развитие продолжение предыдущего или его отрицание. Но чем дальше мы отступаем в тень исторического прошлого, тем большей становится неполнота нашего фактического материала и тем больше необходимости прибегать к косвенным свидетельствам, а часто и к догадкам. Мы не можем избавить себя от этой необходимости тем, что, облачившись в мантию объективности, ограничимся лишь констатированием известных нам фактов, ибо собрание разрозненных фактов, не скрепленных цементом исторического единства, еще не составляет содержания исторической науки.

Марксистский метод позволяет к вопросу об исторической интерполяции подойти с оружием критики, гораздо более остро отточенным. Именно признание решающей роли материальных факторов для направления научной деятельности людей дает нам в руки критерий для установления и проверки исторической гипотезы, а учет влияния классовой идеологии позволяет нам отделить в свидетельских показаниях современников, а также позднейших историографов и комментаторов, отделить в них элементы объективно исторические от идеологических искажений, обусловливаемых иногда непониманием эпохи, иногда и просто апологетическими мотивами.

Такова в общих чертах постановка проблемы интерполяции. Что касается практического применения этих положений, то здесь еще раз приходится подчеркнуть необходимость внимательнейшего учета конкретной обстановки. Чем острее оружие исторической критики, тем с большей осторожностью необходимо с ним обращаться.

В своей работе «Платон как математик» [1] я сделал попытку применения указанного метода к вопросу об оценке роли этого философа в истории греческой математики.

Позвольте мне резюмировать полученные мною выводы, отсылая за подробностями к указанной статье. Переоценка роли Платона в истории математики, которую я предпринял, основывалась на соображениях такого рода. Мне бросилось в глаза резкое несоответствие между ролью, которая приписывается Платону в истории математики, и крайней бедностью содержания «математических мест» в сочинениях Платона. Здесь представлялось два пути: во-первых, предположить, что математические сочинения Платона до нас не дошли или что Платон свои математические идеи не изложил в письменной форме; во-вторых,—усомниться в самом факте математической продуктивности Платона. Если я не отбросил эту вторую гипотезу, несмотря на свидетельства позднейших авторов, то это произошло потому, что

[1] См. стр. 161.

я не мог игнорировать классового момента. Пифагорейская математическая школа была не только научной, но и политической группировкой, ярко отражавшей интересы аристократии. Платон продолжает как научные, так и политические тенденции этой группировки, которая в этот период находится в оппозиции, будучи отстранена от власти в передовых греческих городах. Это обстоятельство проливает свет на тенденцию развития пифагорейской математики, на ее идеал «чистой» науки и на присущий ей мистицизм. В этом свете «математические места» Платона получают очень естественное истолкование: математика в руках Платона становится орудием идеалистических и прямо мистических спекуляций.

В этих условиях проблема исторической интерполяции привела меня к выбору в т о р о й гипотезы. Она совершенно согласна с тем, что дают сочинения Платона. То обстоятельство, что она противоречит указаниям позднейших комментаторов, отделенных от эпохи Платона несколькими столетиями, легко объясняется как неосведомленностью авторов, так и их пиэтетом по отношению к Платону, которому они склонны были по идеологическим мотивам приписывать ряд открытий с той легкостью, с какой создаются всевозможные исторические мифы.

Таковы те соображения, которые привели меня к решению данной проблемы исторической интерполяции, отличному от традиционного. Разумеется, в этом построении есть некоторый элемент гипотетичности. Но с точки зрения этой гипотезы становятся понятными все факты истории античной математики, так или иначе связанные с именем Платона. По крайней мере, я могу констатировать, что, во-первых, насколько мне известно, никто не сделал попытки ф а к т а м и опровергнуть высказанную мною точку зрения и что, во-вторых, те работы, с которыми я познакомился после того, как статья о Платоне была напечатана, не только не поколебали, но, напротив, утвердили меня в правильности моей точки зрения.

Позвольте остановиться на двух таких работах.

Разделяя традиционный взгляд на математические заслуги Платона, Эрих Франк [1] видит в одном свидетельстве Платона подтверждение того «факта», что пифагорейской школе принадлежит открытие иррациональностей. Я подчеркиваю, что речь идет именно о б о т к р ы т и и иррациональностей, а не только о создании их теории, которая явилась, по мнению Франка [2], естественным продуктом их открытия.

Утверждение об открытии пифагорейцами иррациональностей имеет источником позднейший комментарий к «Началам» Евклида, принадлежащий, по мнению Гейберга [3], Проклу. Если мы примем традиционную версию о Платоне, то достоверность этого сообщения не будет подлежать почти никакому сомнению, и мы будем иметь дело с констатированием определенного исторического факта. В самом деле «афинянин», излагающий в диалоге точку зрения Платона, говорит,

[1] Frank E., Platon und die sogenannten Pythagoräer, Halle 1923, S. 59.
[2] Ibid., S. 224.
[3] «Euclidis Elementa», ed. Heberg, V, 415.

что он сам лишь в позднейшее время освободился от предрассудка, что длина с длиной, ширина с шириной и высота с высотой всегда соизмеримы между собой [1].

Франк, принимая традиционную версию и считая, что заявление «афинянина» дает биографический факт, заключает, что открытие несоизмеримых линий было сделано при жизни Платона. Но такой вывод никак нельзя согласовать с тем, что так называемая пифагорова теорема была открыта или тем более доказана Пифагором, как полагает Кантор, опираясь на свидетельства Прокла и Плутарха [2]. Если же свидетельство Прокла не принимать во внимание в данном случае, то почему нужно верить ему в других его высказываниях? Сам Франк в основу всей своей работы кладет отрицание традиционных легенд о Пифагоре и его школе и под «так называемыми пифагорейцами» вместе с Аристотелем разумеет представителей философского течения, деятельность которых датируется временем около 400 г. до н. э. Это делает для Франка возможным придвинуть открытие пифагоровой теоремы ко времени жизни Платона [3].

Таким образом, говоря словами самого Франка, картина развития греческого духа принимает совсем иной вид [4].

Но соответствует ли действительности эта картина? Могло ли открытие существования иррациональностей произойти так поздно? Это предположение представляется совершенно невероятным, если принять во внимание, что народам Древнего Востока, от которых греки получили свои первые сведения по геометрии, пифагорова теорема была известна очень давно. В прошлом году появились работы Нейгебауэра и В. Струве, которые документально устанавливают, что в древнем Вавилоне была известна пифагорова теорема, что вавилоняне знали общую формулу решения числовых квадратных уравнений и что приближенное вычисление квадратных корней не представляло для них затруднений [5]. При этих условиях возможно ли, чтобы существование иррациональных чисел могло быть секретом для греков в V и даже в VI в. до н. э.

Совсем иную картину получим мы, если традиционный взгляд на Платона как математика будет отброшен. В таком случае, если даже принять, что указанное выше место из «Законов» представляет историческое свидетельство о том, что Платон лишь на старости лет узнал о существовании несоизмеримых линий,—даже в этом случае отнюдь не следует, что этот факт был открыт греками в первой половине IV в. Напротив, опираясь на то, что греческие математики не могли не знать о существовании несоизмеримых чисел в то время, когда Платон был человеком молодым, мы получаем новое доказательство

[1] Платон, Законы, 819 Д. Это сочинение написано Платоном в конце его жизни—Платон умер в 347 г. до христ. эры.

[2] Cantor M., Vorlesungen, I. S. 280.

[3] Frank E., Platon und die sogenannten Pythagoräer, Halle 1923, S. 222.

[4] Ibid., S. V.

[5] Neugebauer O., Zur Geschichte der babylonischen Mathematik, S. 80 Neugebauer O. and Struwe W., Ueber die Geometrie des Kreises in Babylonien, S. 91. Обе работы напечатаны в журнале «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik», Abt. B., Band 1, Heft 1, Berlin 1929.

того, что Платон никогда не принадлежал к числу передовых математиков своего времени и что свое математическое образование он имел случай несколько пополнить лишь на старости лет.

Вторая работа, о которой я хочу сказать, хотя и не касается непосредственно вопроса о математических трудах Платона, но в основе своей имеет предпосылкой полную уверенность в справедливости традиционного взгляда. Более того, автор ее подозревает, что Платон собирался построить теорию вещественного числа, близкую к современной, что лишь благодаря критике Аристотеля греческая математика пошла по тому направлению, которое указал ей Платон. Автор этот—известный математик Теплиц. Его работа [1] ставит себе целью исследовать, не представляют ли «идеальные числа» Платона «теоретико-познавательного воплощения математического отношения». С этой целью он интерпретирует целый ряд весьма темных мест из Платона и не менее темных мест из других авторов. Не будучи филологом, я не могу критиковать эти интерпретации. Скажу только, что сам автор не считает возможным рассматривать свою работу как решение вопроса. Для нас однако интересно услышать мнение автора о методе, которым решение это может быть найдено.

«Будучи математиком,—говорит Теплиц,—я должен однако заявить, что ясность в этом вопросе может быть достигнута не измышлением математических возможностей—их имеется достаточно—но лишь на филологической основе, переводя и интерпретируя» [2].

Здесь я должен сказать, что переводов и интерпретаций крайне темных мест Платона может быть предложено гораздо больше чем математических возможностей; не на филологической, но лишь на исторической основе может быть достигнуто решение этой проблемы исторической интерполяции. И если Галилей, движимый верой в божественное происхождение библии, мог быть искренно убежденным в том, что библейский рассказ о чуде Иисуса Навина не только не опровергает коперниковского учения, но и служит одним из главных аргументов в его пользу, то нас не должно удивлять, что люди, уверенные в том, что всякое новое направление в истории человеческой мысли находило прообраз своих идей у Платона [3],—что такие люди искренно убеждены в достоверности исторической традиции, приписывающей Платону решающее влияние на развитие математической мысли греков.

То, что мною сказано было по поводу этой и других конкретных исторических проблем, я настоятельно прошу рассматривать не как претензию на окончательное их решение, а как иллюстрации к тем основным теоретическим положениям, которые были выставлены мною в противовес приведенным взглядам ряда немарксистских авторов. Очень возможно, что в анализе конкретных проблем я допустил существенные ошибки,—я уже говорил о всех трудностях, связанных с применением на практике марксистского исторического метода. Вот

[1] Toplitz O., Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato, S. 10—29.
[2] Ibid., S. 33.
[3] Op. cit. S. 11.

почему я буду очень рад услышать здесь строгую критику своего доклада, критику, опирающуюся на факты истории математики.

Но я буду считать, что не напрасно занял ваше внимание, если мне удалось показать, что история математики, уже выйдя из стадии накопления сырого материала, не может развиваться далее на той методологической базе, которая характеризует ее современное состояние и которую, надеюсь, я очертил достаточно рельефно; что перестройка всего историко-математического здания настоятельно необходима; что лишь марксистскому анализу под силу эта задача.

Для того, чтобы эта задача получила свое решение, необходимо чтобы внимание математиков нашей страны (а лишь у нас возможно ныне широкое развитие науки на марксистской базе)—чтобы математики нашей страны уделили работе по изучению истории нашей науки гораздо большее внимание, чем это было до сих пор. А нужно сознаться, что история математики у нас до сих пор находится в очень незавидном положении. Специальных журналов, посвященных этой дисциплине, мы не имеем; в наших научных органах не печатаются статьи и исследования по истории; наши молодые научные работники не получали никакой исторической подготовки. Достаточно указать, что в программу аспирантских занятий в Московском университете не включалось ни ознакомление со сводными работами по истории математики, ни изучение классических математических трудов. Наши аспиранты никогда не читали Евклида, а о Ньютоне, Лейбнице, Бернулли, Эйлере знают только по названиям теорем, которые (по большей части неправильно) им приписываются. В этом отношении мы далеко отстаем от капиталистических стран, где общим признанием пользуется та истина, что изучение истории дает ценные указания как для творческой научной работы, так и для преподавания математики на всех её ступенях. Этому последнему вопросу можно было бы посвятить специальный доклад; я ограничиваюсь только указанием на него.

Мы обязаны констатировать факт нашего отставания, как бы ни был он грустен. Но мы должны приложить свои усилия к тому, чтобы на втором нашем Всесоюзном съезде мы могли констатировать иное положение вещей. Только тогда, когда интересы математиков СССР будут обращены на изучение истории, только тогда мы можем поставить и, при коллективном сотрудничестве с представителями других дисциплин, приступить к решению проблем истории математики на базе марксистской методологии.

Только на базе марксизма возможен дальнейший прогресс истории математики; только овладев методом Маркса, история нашей науки сможет с полным правом и основанием присвоить себе звание науки.

М. Выгодский

ПЛАТОН КАК МАТЕМАТИК [1]

Тема, избранная мною для настоящего сообщения, может показаться весьма специальной. Однако это не так. То или другое решение вопросов, здесь рассматриваемых, теснейшим образом связано с оценкой целой эпохи в развитии «точных» наук вообще, математики в частности. Я разумею эпоху, которую принято именовать «античной».

В настоящее время мы имеем немало работ, где с исчерпывающей полнотой собран фактический материал по истории античной науки, дошедший до нас из различных источников. Немало остроумия потрачено на истолкование темных мест того или иного текста. Но до сих пор не было сделано сколько-нибудь удачной попытки дать историю науки в подлинном смысле слова, т. е. рассмотреть тенденцию ее развития в связи с развитием античного общества. Я говорю о научном, материалистическом подходе к вопросу, ибо нельзя конечно считать удовлетворительным метод объяснения, апеллирующий в конечном счете к «духу эпохи». В такого рода объяснениях нет недостатка: к ним прибегают на каждом шагу даже авторы многочисленных специальных работ; и ничего удивительного нет в том, что философу-идеалисту эта апелляция к духу эпохи позволяет в один присест нарисовать стройную картину исторического развития науки. В самое последнее время такую «картину» дал нам Шпенглер в «Закате Европы».

Замечательно при этом то, что, воздвигая воздушные замки «исторических» теорий, авторы их почти всегда обнаруживают прохладное отношение к историческим фактам. Увлеченные пылом своего «строительства», они не замечают, что не только с методологической, но и с фактической стороны они стоят на зыбкой почве. Оказывается, что «факты», «объясняемые» ими, сами представляют собой только легенды. Более того, можно в ряде случаев указать и на источники создания этих легенд и обнаружить классовую их подоплеку.

Одной из таких легенд является легенда о Платоне как математике.

---

[1] Статья эта представляет собой литературную обработку доклада, прочитанного в Секции ест. и точных наук Комакадемии. Ряд вопросов, затронутых в первых двух разделах ее, несомненно требует более детального освещения. Если, несмотря на неполноту и некоторую догматичность изложения в этих частях, я решаюсь представить эту работу на суд читателя, то это потому, что основная тема статьи, как мне кажется, развита с достаточной полнотой, а к связанным с ней вопросам, относящимся к истории античной математики, я надеюсь в ближайшее время вернуться. *М. В.*

Опровержению этой легенды, а вместе с тем и объяснению ее возникновения, посвящена эта работа.

Я останавливаюсь именно на ней по двум причинам: во-первых, потому, что подлинные сочинения Платона дошли до нас в таком виде, в каком не дошли другие источники (сплошь и рядом историки науки опираются на «документы», известные только из вторых и третьих рук); во-вторых потому, что на разборе этой легенды лучше всего выяснить те общие методологические вопросы, которые возникают при критическом изучении истории античной науки.

Нет буквально ни одной работы по истории античной науки вообще, математики в частности, где Платону не отводилось бы почетное место в истории математики.

Имя Платона упоминается в связи с решением проблемы об удвоении куба; в связи с нахождением рациональных прямоугольных треугольников (т. е. таких, все стороны которых выражаются рациональными числами); в связи с приближенным извлечением квадратных корней [1], в связи с формулировкой определений основных понятий в математике [2].

Платону приписывается установление новых методов: «аналитического», «синтетического», «аподиктического» (доказательство от противного) [3] в геометрии, и это признается его главной заслугой в истории математики.

Есть ли в сочинениях Платона места, дающие повод для подобных заключений? Всякий, кто даст себе труд прочесть их, убедится в том, что таких мест у Платона н е т. Вы найдете у Платона немало примеров, взятых из области математики, которыми он иллюстрирует отдельные положения, высказываемые действующими лицами его диалогов; все эти примеры, как явствует из контекста, представляют апелляцию к хорошо известным и твердо установленным фактам математики. Большая часть их имеет характер простых аналогий и притом, как убедится читатель из нижеприводимых примеров, аналогий весьма поверхностных.

Далее всякий, кто даст себе труд сличить текст Платона с теми выводами, которые делают историки математики на основании этого текста, увидит, что для того, чтобы усмотреть в сочинениях Платона даже намек на то или иное открытие, якобы сделанное им, приходится допускать совершенно произвольные толкования, натянутость которых прямо бьет в глаза [4].

---

[1] Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik B. I. S. 201—222.

[2] Heath, The thirteen books of Euclid's elements, Cambrige, 1908, I, p. 165—171.

[3] Hoppe, Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum, Heidelberg 1911, S. 148—152.

[4] Из новых авторов пожалуй наиболее высоко ставит Платона, как математика, Гоппе. В указанной выше книге (стр. 142—165) читатель найдет многочисленные ссылки на тексты Платона.

Не могу не привести здесь же один пример подобного толкования, принадлежащего Гоппе [1]. Он утверждает, что Платон разрешил не только ряд методологических проблем самой математики, но и проблему восприятия пространства, установив, что трехмерное пространство дано нам в зрительном восприятии, как двухмерное (!).

Этот сногсшибательный вывод делается на основании «толкования» известного места из «Государства» Платона [2], где Платон утверждает, что истинно-существующим является лишь мир идей, а «чувственный» мир является лишь слабым, несовершенным отображением его, и подтверждает это таким сравнением: человек, живущий в глубокой пещере, не видел бы предметов на поверхности земли, а знал бы их лишь по теням, отбрасываемым ими в пещеру.

Как видите, историк науки «переплатонил» самого Платона. И такое «толкование» Платона не исключение, хотя, быть может, нигде не выступает с такой явной абсурдностью.

Итак первое, что я утверждаю,— это то, что сочинения Платона, дошедшие до нас, не дают нам никакого права считать его выдающимся математиком своей эпохи, не дают оснований приписывать ему те или иные открытия в области точных наук. Что же касается свидетельств позднейших авторов, на которые опираются историки науки, то, как мы увидим, есть все основания сомневаться в их правильности.

Я утверждаю, во-вторых, что, если в истории математики Платон сыграл какую-нибудь роль, то только роль реакционную, препятствуя движению вперед математики как науки, точно так же, как реакционной была его роль в развитии точных наук вообще.

Прежде, чем перейти к доказательству выдвинутых здесь положений и к разбору важнейших мест из сочинений Платона, нас интересующих, я прошу разрешения в самых общих чертах набросать картину развития математических знаний греков в VI и V вв. до н. э.

Наши сведения в этой области очень скудны и отрывочны, но с совершенной несомненностью можно утверждать, что бурное развитие античного общества в этот период, расцвет торговли, возвышение торговых классов греческих городов-государств, возникновение мастерских ремесленного и мануфактурного типа, кораблестроение и мореплавание, военная техника, архитектура, скульптура и живопись— все это вызвало быстрое развитие точных наук (астрономия, механика, математика).

---

[1] Hoppe, S. 153.
[2] Платон, Государство, VII, 514 A. и след

Более того, можно проследить во многих случаях прямую связь возникающих проблем «чистой математики» с потребностями «прикладной» науки. Я не могу сейчас заняться рассмотрением возникающих здесь вопросов, не могу приводить тех аргументов, которыми, как мне кажется, мои выводы вполне подтверждаются, приведу только некоторые из этих выводов.

Из потребностей мореплавания возникает проблема конструкции часов. Первым прибором для измерения был «гномон» — палочка, отбрасывающая тень. Гномон служил и для измерения высоты вертикального предмета по его тени. Отсюда не только учение о пропорциях (числовых), но и учение о конических сечениях, ибо конец тени гномона описывает гиперболу различной формы в зависимости от времени года. Изображения этих гипербол имелись на «циферблате» солнечных часов («арахнея»).

Конические сечения (эллипс) тесно связаны с архитектурой (орнаменты). Мы знаем, что греческие архитекторы, желая придать орнаменту видимую форму круга, делали его эллипсом. С архитектурой и скульптурой связана и теория пропорций (между прочим «золотое деление» — деление в крайнем и среднем отношении).

Извлечение корней из чисел требовалось задачами архитектуры и военного дела. При изготовлении метательных орудий для расчета размера жолоба по весу камня (снаряда) приходилось извлекать (приближенно конечно и очень грубо) кубический корень из числа. Можно утверждать, что знаменитая «делийская» задача—об удвоении куба—возникла, как задача «артиллерийская»—найти размеры жолоба при удвоении веса «снаряда».

Теория перспективы была, несомненно, известна скульпторам и в особенности живописцам эпохи Перикла. По крайней мере известно, что во время постановки трагедий в афинском театре публика принимала декорации за действительные предметы — так были они хорошо нарисованы.

Несомненна и тесная связь между развитием геометрии круга и керамическим производством, процветавшим в Аттике. Немалую роль должно было играть керамическое производство, чрезвычайно распространенное и носившее характер массового производства на внешний и внутренний рынок, и на развитие «пространственного представления» греков (орнаментика ваз).

Этих кратких замечаний достаточно для того, чтобы составить представление о «производственных» корнях греческой математики (об ее «идеологической» базе речь будет еще впереди). Из них ясно также, что социальной базой математики, как науки, должна была явиться группа «технической интеллигенции». Интересы этой группы были тесно связаны с интересами торгово-промышленного класса, выступающего в течение VI и V вв. как революционная сила против земельной аристократии, и одерживающего ряд блестящих политических побед.

Какова же была роль идеологов реакционных классов греческого общества в развитии математики?

Наиболее ярко реакционные тенденции выявляются, как известно, в пифагорейской школе, представлявшей собою хорошо организованную не только идеологическую, но и политическую группировку. И вот, если мы обратимся к тому, чем обогатила математику эта школа, то увидим следующее: главное внимание пифагорейцы уделяли так называемой числовой мистике, т. е. установлению «скрытых» свойств чисел; этими «скрытыми» свойствами чисел они оперировали как для построения своей натурфилософии, в которой божественному провидению отводилась доминирующая роль, так и для «доказательств» правильности своих политических идеалов.

Что касается положительных открытий в области точных наук (например теория музыкальной гармонии), то, если и принять на-веру свидетельства весьма пристрастных авторов, сообщающих об этом, во всяком случае, даже в их изложении эти открытия выступают, как нечто второстепенное, побочное. Кстати сказать, зависимость между длиной струны и высотой звука должна была иметь большое значение для «артиллерийского» дела, ибо по звуку, издаваемому ж и л а м и, метатели проверяли степень натянутости их, что имело решающее значение для определения, готово ли орудие к употреблению.

Таким образом, пифагорейская школа занималась числовой мистикой предпочтительно перед другими проблемами математики. Всякое же приложение этой «божественной» науки к практическим вопросам трактовалось как недостойное философа, и, в лучшем случае, только терпелось.

Итак до-платоновская эпоха в истории греческой математики была представлена двумя основными направлениями математической мысли, которые могут быть охарактеризованы, как направление материалистическое (атомисты, софисты) и идеалистическое (пифагорейцы). Эти направления характеризуются как теми проблемами, которые ставятся, так и теми методами, которыми проблемы разрешаются. Именно: материалистическое направление ставит проблемы, тесно связанные с проблемами прикладной математики; идеалистическое направление занимается вопросами, имеющими мало интереса для прикладных дисциплин. Материалисты широко пользуются математической интуицией; идеалисты требуют абстрактно-логических методов доказательств. Всего резче расхождения методологического характера можно проследить на спорах, происходивших вокруг метода бесконечно-малых, если употребить современный термин, или метода неделимых, употребляя терминологию древних греков. Пользуясь этим методом, Демокрит разрешал вопрос об объеме пирамиды и конуса, а Антифон и Бризон — вопрос о квадратуре круга. Сторонники «формального» направления отрицали всякую научную ценность этих выводов, так как метод неделимых был неприемлем для них, как формально-противоречивый. Так велика была острота этого спора, что результатом его явилось изобретение нового, чрезвычайно громоздкого метода «исчерпывания», посредством которого удалось придать некоторую формальную строгость выводу теорем об объеме пирамиды и конуса и некоторых других

теорем геометрии. Этим методом и доказаны они в «Элементах» Евклида (III в. до н. э.). Что касается проблемы квадратуры круга, то ввиду неудач всех попыток формализировать результаты, полученные методом неделимых, эта чрезвычайно важная проблема была вовсе исключена из «научных» построений идеалистического направления и у Евклида отсутствует, как отсутствует вся «измерительная» геометрия. Лишь Архимед в конце III в. до н. э. вновь возвращается к проблеме квадратуры круга и притом трактует ее по существу старыми методами, отвергнутыми греческой математикой в эпоху господства в ней идеалистического направления.

В до-платоновскую эпоху материалистическая тенденция преобладала в греческой математике, что вполне соответствовало господству материалистической философии в области идеологии и вытекало из политического преобладания торгово-промышленных классов в большинстве греческих городов-государств.

Пифагорейская школа представляла собой оппозицию в науке так же, как в философии и в политической жизни.

Что касается других философских школ, кроме упомянутых выше, то скудость наших сведений не позволяет с определенностью выяснить их позицию по отношению к методам и проблемам математики. Кое-какие сведения имеются лишь о позиции школы элеатов (Зенон и его знаменитые апории), но я сознательно воздерживаюсь от обсуждения возникающих здесь вопросов, так как при всей сомнительности, на мой взгляд, обычного толкования апорий Зенона, я не могу с достаточной убедительностью доказать справедливость гипотезы, которая могла бы быть ему противопоставлена.

Но, если для до-платоновской эпохи мы не можем полностью восстановить картину развития математики и тем самым доказать непосредственно правильность утверждения о существовании двух течений в греческой математике (что не исключает конечно и промежуточных оттенков)—то, начиная от Платона, мы имеем в руках подлинники важнейших сочинений греческих философов и математиков. Изучение их полностью подтверждает выводы, изложенные выше.

В этой работе я постараюсь использовать тот материал, который дает нам изучение Платона.

Платон родился в 429 и умер в 348 г. до н. э. Таким образом он жил в период, характеризующийся наступлением и победами реакции в греческих городах Балканского полуострова. По происхождению Платон принадлежал к знатной аристократической фамилии, а по своим политическим убеждениям к крайней правой аристократической группировке. Его политические взгляды изложены им систематически в двух больших сочинениях: «Государство» и «Законы», где речь идет об устройстве «идеального» общества. Как можно судить по этим сочинениям, из которых второе написано гораздо позднее первого, политическая программа Платона не оставалась неизменной, однако он в основных вопросах твердо стоит на одной точке зрения. Лишь небольшая группа «лучших» должна обладать, по Платону, правами гражданства и управлять государством. Остальные, «подданные» должны лишь повиноваться.

Но Платон был не только теоретиком аристократической партии, он был и активным политическим деятелем. Трижды в течение своей жизни он пытался (правда, безуспешно) свергнуть демократическую диктатуру в Сицилии, совершив три «заграничных» путешествия в Сиракузы с большим риском для жизни.

Философия Платона вполне гармонирует с его политическими воззрениями. Являясь продолжателем тенденций пифагорейской школы, он создал стройную последовательно-идеалистическую систему, в основу которой было положено учение о мире «идей», существующем вечно и неизменно, по образу которого создан божеством наш земной, преходящий мир.

Эту идеалистическую систему нужно было привести в согласие со всей совокупностью тогдашних научных сведений греков, и так как область «точных» наук была наиболее разработана и систематизирована, то вполне понятно стремление Платона подвести под свое учение «физико-математический» базис. Это он и пытается сделать. Начиная от мелких деталей и кончая учением о мироздании, Платон постоянно привлекает в качестве доказательства материал из математики, как наиболее точной и совершенной науки.

Однако, как мы сейчас увидим, в сочинениях Платона мы имеем дело не с математикой, как таковой, а с «математической мистикой», граничащей порой с «математической» мистификацией.

Наше изложение мы начнем с диалога «Тимей», в котором изложена натурфилософия Платона. Платон устами Тимея излагает здесь происхождение и устройство вселенной, происхождение жизни на земле, эволюцию живой и мертвой природы и законы природы. При этом в последней инстанции все выводится из творческих актов разумно действующего божества.

Посмотрим же прежде всего, как бог Платона творил мир. Оказывается, что прежде всего были созданы четыре «стихии»: огонь, воздух, вода и земля. Эти четыре стихии просто заимствованы Платоном у Эмпедокла. Однако у бога Платона были свои соображения, когда он творил именно эти, а не другие стихии, и когда он ограничил их число четырьмя. Эти соображения и сообщает нам главное действующее лицо диалога—Тимей.

«Происшедшее должно быть телесно, видимо и осязаемо [1]. Но видимым ничто не может быть без огня, осязаемым —без некоторой твердости и твердым без земли. Поэтому, начав созидать тело вселенной, бог творил его из огня и земли».

«Но хорошо связать только два предмета без третьего невозможно, потому что в середине между ними должна быть соединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей — та, которая и связуемое и самое себя сделала бы именно одним. А свойство производить это наилучшим образом имеет пропорция. Ведь когда из трех каких-либо чисел, либо масс, либо площадей, среднее относится к последнему так, как первое к нему самому... в таком случае все они по необходимости

[1] «Тимей», 31 В—32 С. Цитирую по русскому переводу Карпова.

окажутся тождественными, а ставши тождественными одно другому, образуют вместе одно».

Итак две стихии — огонь и земля — необходимы богу, чтобы создать мир видимым и осязаемым. Что касается остальных стихий, то они нужны просто для хорошей спайки, как цемент мироздания. Из подчеркнутого мною места видно, что Платон, считая непрерывную пропорцию самой стройной математической формой связи, требует от своего бога создания мира стихий по образу непрерывной пропорции. Но почему же тогда является не о д н а связующая стихия, а две? В последующих строках Платон выясняет причину этого на первый взгляд странного, но на самом деле полного мудрости акта божества.

«И вот, если бы телу вселенной надлежало быть поверхностью, не имеющей вовсе глубины, то одной среды было бы достаточно, чтобы связать и приложенные к ней крайности и самое себя. Но космосу надлежало быть телообразным, тела же сплачиваются не одною, но всегда двумя серединами».

Чтобы понять всю глубину соображений, которыми руководствовался бог Платона, необходимо иметь в виду следующее: во второй половине V в. до н. э. (точнее указать время не представляется возможным) Гиппократ Хиосский свел знаменитую задачу об удвоении куба к задаче о нахождении двух средних пропорциональных между стороной данного куба и удвоенной длиной.

Переводя результат Гиппократа на язык современной математики, можно формулировать его так: дан куб со стороной a; найти сторону x куба, имеющего объем вдвое больший объема данного куба. Результат Гиппократа гласит: величина x удовлетворяет пропорции:

$$a : x = x : y = y : 2a. \tag{1}$$

Действительно, решая систему уравнений (1), находим:

$$x = a\sqrt[3]{2}, \tag{2}$$

$$y = a\sqrt[3]{4}, \tag{3}$$

или, освободив (2) от радикала,

$$x^3 = 2a^3. \tag{4}$$

Итак для удвоения куба («тела») необходимо решить «пропорцию» с двумя «средними членами» (x и y). Для решения же аналогичной задачи для квадрата («поверхность») достаточно только одной средней пропорциональной (из пропорции $a : x = x : 2a$, находим $x^2 = 2a^2$, или $x = a\sqrt{2}$).

Если добавить еще, что во время, когда был написан «Тимей» (это одно из позднейших произведений Платона и значит относится, примерно, к середине IV в. до н. э.), исследования Гиппократа принадлежали уже истории — то будет ясно, что соображения Платонова бога были столь же прозрачны, сколько и глубокомысленны.

Однако последуем дальше за Платоном, который указывает, что не только в количественном, а и в качественном отношении «стихии» были созданы мудрым творцом по принципу пропорции.

«Поэтому в середине между огнем и землей бог поместил воду и воздух, установив между этими стихиями по возможности одинаковое

отношение, т. е. чтобы огонь относился к воздуху, как воздух к воде, а воздух к воде, как вода к земле, и таким образом связал их и построил видимое небо. Вот для чего тело космоса рождено из этих, и таких именно по качеству, и четырех по числу, начал, с пропорциональной между ними связью, и отсюда получило оно свой согласный строй, так что, пришедши к тождеству само с собой, оно не может быть разрешено никем другим, кроме того, кто связал его».

Мы видим, что, заимствовав у своих предшественников учение о стихиях, Платон приписывает создание этих стихий богу. Но голая апелляция к божеству была бы еще недостаточна для настроенного весьма рационалистически торговца, владельца мануфактурной мастерской, архитектора, механика и т. д. И вот Платон «научно» подкрепляет свои метафизические настроения, апеллируя притом к самой точной науке—математике и опираясь на выводы, составляющие достижение «высшей» математики того времени. Если еще принять во внимание, что эти выводы для широких кругов образованной публики были известны, но конечно весьма поверхностно, то будет понятно, что аргументация Платона могла казаться глубоко научной и иметь большое влияние на умы современников.

Весь «Тимей» выдержан в таком же духе квази-научной аргументации, и «математические» доказательства играют в этой аргументации первенствующую роль.

Развивая дальше свою «теорию стихий», Платон хочет объяснить происхождение качественно различных веществ, встречающихся в природе.

И опять рассуждение идет «дедуктивно»: «что, во-первых [1], огонь, земля, вода и воздух суть тела — это ясно для всякого. Но всякий вид тела имеет и глубину; всякая глубина необходимо заключает природу поверхности [2], а построенная на прямых линиях поверхность состоит из треугольников. Треугольники же все получают начало из двух треугольников, у которых — обоих — один угол прямой и два острых: первый из треугольников в каждом остром угле содержит по половине прямого угла, разделенного сторонами равными, а другой отделяет им неравными сторонами части неравные».

Ясно, что речь идет о прямоугольных треугольниках, один из которых равнобедренный, а другой произвольный. Ясно также, что, говоря о том, что все треугольники получают начало из прямоугольных, Платон имеет в виду разбиение треугольника одной из высот его. Но нужно обратить внимание на необычайно туманную форму, в которой излагаются эти совершенно элементарные для той эпохи рассуждения. Она не является случайной, и в ней во всяком случае нельзя видеть результат позднейшего искажения текста Платона, ибо, если бы Платон изложил свои мысли тем ясным математическим языком, которым писали его современники-математики, судя по сохра-

---

[1] «Тимей», 53 С и дальше.

[2] Это место не совсем ясно; обычное толкование такое: раз тело имеет глубину, оно должно иметь длину и ширину.

нившимся отрывкам, то вряд ли даже самый невежественный переписчик мог бы придать им такую запутанную форму. Именно эта неясность выражений помогает Платону перебрасывать мост от точной науки к метафизическим построениям.

Несколькими строками ниже после приведенной цитаты мы читаем: «Надо нам рассудить, как могли возникнуть эти прекраснейшие четыре тела [1], которые, хотя и не подобны друг другу, могут однако, разрешаясь, происходить одно из другого [2]... Так надо постараться составить эти четыре рода тел, отличающиеся своей красотой, чтобы затем объявить, что мы достаточно поняли их природу».

Дальше идет длинное и туманно изложенное рассуждение о том, как из прямоугольных треугольников получаются правильные многогранники. «Прекраснейшим» треугольником является равносторонний. Самым же прекрасным из неравносторонних прямоугольников Платон объявляет тот, у которого один из катетов вдвое меньше гипотенузы (с острыми углами 60 и 30°); по этому поводу он замечает: «...Почему — это долго было бы объяснять, но кто нас опровергнет и обличит, что это не так, награда тому будет в нашей дружбе». Не правда ли, веский аргумент?

Из двух таких треугольников образуется равносторонний треугольник, а из равносторонних треугольников составляются три правильных многогранника: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр (четырехгранник, восьмигранник и двадцатигранник). Из двух же равнобедренных прямоугольных треугольников образуется квадрат, а из квадратов — куб (правильный шестигранник). Эти четыре, столь «прекрасно» составленные Платоном правильных многогранника, и служат геометрической формой четырех стихий. Платон добавляет: «Но так как оставалось еще одно, пятое соединение, то бог употребил его для очертания вселенной» [3]

Речь идет, конечно, о пятом правильном многограннике — додекаэдре (двенадцатигранник), составленном из двенадцати правильных пятиугольников.

Дальше Платон «распределяет» эти четыре геометрические формы между четырьмя стихиями: «Земле [4] представим мы вид кубический потому, что земля из четырех родов наименее подвижна и между телами — самое пластическое, а такие именно свойства необходимо представляет тело, имеющее наиболее твердые основания». И далее, исходя из степени легкости и подвижности каждой стихии, Платон наделяет огонь формой тетрадэра, воздух формой октаэдра и воду формой икосаэдра.

---

[1] Т. е. четыре стихии. *М. В.*

[2] Подчеркнуто мной. *М. В.*

[3] Здесь Платон противоречит самому себе. Несколько раньше, в том же диалоге тот же Тимей заявляет, что бог дал вселенной форму шара, как самого совершенного тела (Тимей, 33 С).

[4] 55 Е.

Как же мыслит себе Платон принадлежность той или иной геометрической формы к той или другой стихии?

«Но все эти виды нужно мыслить настолько малыми, что каждый единичный вид каждого из родов, по малости, недоступен нашему зрению, и мы видим только массы их при скоплении множества единиц».

Итак, взяв у Эмпедокла четыре стихии, Платон берет у Демокрита атомическую теорию, втискивает ее в рамки «четырех стихий» тем, что фиксирует форму атомов, у Демокрита бывшую вполне произвольной.

Платон идет дальше: он переходит к превращению одного вещества в другое. Земля по Платону ни во что превращаться не может, ибо лишь земля «составлена» из четырехугольников; остальные же стихии, будучи все построены из треугольников, могут переходить одна в другую. «Вода, будучи разделена огнем или также воздухом, может составить одно тело огня и два воздуха. Доли воздуха из одной разряженной его части образуют опять два тела огня..., а если побежден и раздроблен воздух, то из двух с половиной его частей сплотится один целый вид воды» [1].

Таким образом превращение стихий исследуется не только качественно, но и количественно, причем обнаруживается любопытная вещь: расчет ведется не на объемные, а на поверхностные единицы по «химическим» формулам вроде такой: 1 вода=1 огонь+2 воздух, или, придавая каждому элементу число, соответствующее числу его граней: $20 = 4 + 2 \cdot 8$.

Такая «поверхностная» теория строения вещества является поистине поверхностной для столь глубокомысленной философии. Нам незачем следовать дальше за развитием этой теории. Из приведенного материала уже с достаточной отчетливостью видно, что Платон видел в математике не орудие исследования внешнего мира, а лишь средство для квазинаучного обоснования своего по существу религиозного мировоззрения. Математическими фактами он пользовался только для того, чтобы путем аналогий, хотя бы и поверхностных, показать, что действия божества вытекают из его совершенного разума. Недаром Платону приписывается афоризм: «Бог творит геометрически» [2]. Однако, как видит читатель, бог Платона был не глубоким знатоком геометрии.

Мы увидим дальше, что Платон прямо говорит о том, что в этом именно и заключается значение математики, а вовсе не в ее практических приложениях. Пока же заметим еще, что знаменитое изречение, написанное на входе в платоновскую «академию»,—«Пусть не входит сюда никто, кто не знает геометрии»—получает совершенно другой смысл, чем обычно в него вкладывается: от вступающего в академию требовался известный «минимум», необходимый для того, чтобы понимать науко-образные построения Платона.

Если в «Тимее» Платон стремится «математически» обосновать свою систему происхождения и устройства вселенной, то в целом ряде

[1] 55 E.
[2] Плутарх, Жизнеописания, VIII, 2.

других своих произведений он пользуется примерами, взятыми из математики, для обоснования отдельных своих положений. Но напрасно было бы искать у Платона методологического использования математики: повсюду математические примеры притянуты за волосы и представляют в лучшем случае поверхностные аналогии.

В качестве примера такого использования математики приведу одно место из диалога «Менон».

В этом диалоге Сократ, в уста которого Платон вкладывает свои мнения, исследуя вопрос о том, что такое добродетель, высказывает положение, что истинная добродетель, как и все, что вообще познают люди, приобретается не путем познания внешнего мира, а путем припоминания; сущность всякого знания не в усвоении и систематизации эмпирических фактов, а лишь в припоминании от рождения вложенных в человеческую душу сведений, приобретенных ею в потустороннем мире.

Для доказательства этого положения, которое, несомненно, чрезвычайно характерно для платоновской философии, Сократ прибегает к... эксперименту. Он предлагает своему противнику в споре — софисту Менону (который в начале спора высказал очень здравое суждение о том, что добродетель — понятие весьма относительное) позвать кого-нибудь из его слуг. Менон зовет мальчика, никогда не учившегося геометрии, и Сократ, задавая этому мальчику ряд вопросов, стремится показать, что мальчик, которому вопросы эти помогут вспомнить то, что он когда-то знал, ответит сам на вопрос: как построить квадрат, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата (со стороной в два фута) [1].

Результат этого эксперимента кажется Сократу и его собеседнику вполне убедительным: мальчик «вспомнил», что нужно построить искомый квадрат на диагонали данного! И Сократ торжествующе спрашивает:

— Ну, как тебе кажется Менон, произнес ли он (мальчик) какое-нибудь не свое мнение?

— Нет, все его.

— Однако, он же не знал, как мы говорили недавно?

— Правда.

— И между тем эти мнения были у него или нет?

— Были.

— Следовательно у человека... есть верные понятия о том, чего он не знает.

— Видимо [2].

Если читатель прочтет соответствующее место из «Менона», он увидит, что некоторые вопросы Сократа к мальчику так неясны, что даже человек, знающий геометрию, затруднился бы понять, чего собственно хочет от него Сократ. Но мальчик обнаруживает прямо поразительные способности и отвечает как раз так, как хочется Со-

[1] «Менон», 82 B и след.
[2] «Менон», 85 C.

крату. И все же, несмотря на гениальные способности мальчика, Сократ вынужден главнейшие выводы делать сам, а мальчика спрашивать: не так ли? На что гениальный ребенок отвечает: «Так».

Но, допустим, как это предполагается всегда в таких случаях, что текст «Менона» искажен, что вопросы Сократа действительно понятны, что ответы мальчика сознательны. И тогда все же ясно, что пример притянут за волосы, хотя бы по выбору темы математической беседы. Именно, Платон, очевидно, считает, что для мальчика измерение площади квадрата со стороной в 2, 3 и 4 фута, представляется само собой понятным, так как из этого Сократ исходит при беседе, как из известного. Между тем всякий знает, что даже и теперь, в период жилищного кризиса, далеко не всякий взрослый человек у нас сумеет сказать, чему равна площадь квадрата со стороной 4 фута. Таким образом видно, что Платон не слишком заботился даже о том, чтобы придать своему рассказу хотя бы внешнюю форму правдоподобия.

Приведенные примеры достаточно ярко показывают, какую роль играют «математические» рассуждения в сочинениях Платона: вряд ли нужно утомлять внимание читателя новыми выписками. Достаточно сказать, что в сочинениях Платона нет ни одного места, где бы экскурсии автора в область математики были бы более удачными. Наоборот, немало таких мест, где «математические» рассуждения носят чисто «магический» характер. Таково например доказательство того, что монарх счастливее тирана ровно в 729 раз [1]; таково рассуждение о «божественном» числе, измеряющем продолжительность существования идеального государства [2].

Итак по дошедшим до нас сочинениям Платона мы не можем считать его сколько-нибудь выдающимся математиком своего времени. Но, возразят мне, Платон мог, кроме сочинений, дошедших до нас, написать другие, до нас не дошедшие, посвященные специально математическим вопросам; наконец он мог и не оставить потомству своих математических трудов, а ограничиться тем, что сообщал о своих открытиях своим ученикам.

Что касается первого предположения, то для него во всяком случае нет никаких оснований. Гораздо труднее конечно было бы возразить на второе, тем более, что позднейшие авторы определенно приписывают Платону ряд открытий в математике. Однако сам Платон позаботился о том, чтобы облегчить нам задачу.

Мы вернемся еще к вопросу о том, как создалась легенда о Платоне-математике, а пока посмотрим, каковы были взгляды Платона на значение математики как науки.

В Диалоге «Государство» Сократ поучает своего собеседника Главкона, какими науками должны заниматься правители города—философы. На первом месте он ставит науку о числе: «Ибо военному человеку необходимо знать ее для распорядка войск, а философу, поднимающемуся над миром вещей чувственных,—для достижения сущности»[3].

---

[1] «Государство», IX, 587 C—E.
[2] «Государство», VII, 546 B.
[3] «Государство», 525 B и след.

Нужно иметь в виду, что на обязанности правителя лежит военная защита города. Поэтому Платон допускает приложение науки о числе к военному делу, хотя, как будет ясно из дальнейшего, применение науки к военному делу рассматривается, как нечто для науки побочное и не существенное. Чтобы подчеркнуть, что наука о числе ценна не в приложениях своих, а в своем чистом виде, Сократ, продолжая свою речь, говорит: «Посему эту науку надобно утвердить законом и убедить тех, которые намереваются занять в городе высокие должности, чтобы они упражнялись в науке счисления н е к а к л ю д и п р о с т ы е, но входили своей мыслью в созерцание п р и р о д ы ч и с е л — не для купли и продажи, к а к з а н и м а ю т с я э т и м к у п ц ы и б а р ы ш н и к и, а для войны и самой души — с целью облегчить ей обращение от вещей бытных к истине и с у щ н о с т и».

Можно ли более резко и отчетливо формулировать тезис о том, что наука является классовой в том смысле, что она развивается применительно к потребностям класса, ею занимающегося? Не имеем ли мы в данном примере явно выраженной мысли, что наука служит целям укрепления господства не только физического (военное дело), но одновременно и главным образом идеологического (философия и религия)?

На втором месте Сократ ставит геометрию (планиметрию). Главкон согласен с Сократом, так как по мнению Главкона «и при расположении лагерей, и при занятии мест, и при стягивании и растягивании войск и при всех военных построениях как во время сражений, так и во время походов, геометр много отличается от негеометра».

Главкон мыслит «грубо-материалистически». Но Сократ возражает: «Но для таких вещей достаточна малая часть геометрических и арифметических выкладок, часть же их большая, простирающаяся дальше, должна смотреть, что здесь направляется способствовать легчайшему усмотрению идеи блага...». И, опять подчеркивая свою мысль, Сократ продолжает: «Поскольку геометрия созерцает с у щ е е — она принадлежит нам; а поскольку б ы т н о е — не принадлежит».

Не имеем ли мы в приведенных выше цитатах ясно выраженную тенденцию к отделению науки от жизни, от практики, тенденцию, на которую указывал я, говоря о пифагорейской школе, представительнице идеологии реакционного класса? Эту тенденцию мы найдем и в дальнейшем развитии математики греков. Мы видим уже теперь, что отступление от нее допускается Сократом, как исключение, лишь для такого особо «благородного» занятия, как военное дело.

На третье место Сократ ставит стереометрию, а на четвертое — астрономию. Главкон хотел было предоставить астрономии третье место, «потому что астрономия осязательно представляет чувству и времена года, и месяцы, и годы, что нужно не только для земледелия и мореплавания (!), но не меньше и для военоначальствования».

Опять Главкон показывает себя невыдержанным философом, хотя и старается выразиться помягче («не только для земледелия...»). И опять Сократ, на этот раз уже употребляя едкую иронию, возражает: «Любезен ты; кажется, ты боишься, как бы не показалось народу, что предписываешь науки бесполезные».

Главкон соглашается поставить астрономию на четвертое место и, чтобы исправить свою ошибку, находит теперь, что польза ее в том, что, изучая ее, человек смотрит в высь. Но Сократ недоволен и этим и заявляет, что люди, возводящие астрономию на степень философии, наоборот, «сильно располагают человека глядеть вниз». «Тебе, должно быть, думается,— иронически продолжает Сократ,— что, кто видит украшения на потолке... видит их мыслью, а не глазами... Под именем науки я не могу разуметь чего-нибудь иного, кроме того, что рассуждает о сущем и невидимом, по верхам ли, зазевавшись или зарывшись внизу, приобретает кто известные знания».

«Если же хотят приобрести знания, зазевавшись вверху на что-либо чувственное, то утверждаю, что и не узнают ничего, ибо такие вещи не дают знания...»

Главкон снова признает себя побежденным, и Сократ тогда определяет значение астрономии: она дает лишь слабые намеки и указания для проникновения мыслью в тайны мироздания и для постижения величия бога. Свою речь Сократ заключает словами: «Стало быть, мы и к астрономии, как прежде к геометрии, приступаем, пользуясь высшими вопросами, а находящееся на небе оставим, если хотим, занявшись истинной астрономией, разумно по природе сторону души из бесполезной сделать полезною»[1].

Читатель может себе представить, насколько могла бы подвинуться вперед наука, если бы она следовала мудрым рецептам Платона. Если греческая астрономия сделала крупные достижения в послеплатоновскую эпоху, то это не благодаря Платону, как утверждают буржуазные историки науки, а вопреки Платону, под давлением тех потребностей «земледелия и мореплавания», о которых заикнулся было Главкон. Насколько удалось Платону и его последователям затормозить развитие астрономии, об этом мы не можем судить за отсутствием точных данных, но всем известно аналогичное сопротивление, которое реакционная идеология феодалов в лице святой инквизиции оказала развитию астрономии в новое время.

Чтобы дорисовать картину, укажу еще на ту роль, которую Сократ отводит музыке — пятой по счету науке, вводимой в число предметов обучения философа. Здесь Сократ обрушивается на людей, занимающихся акустическими экспериментами, которые, по его словам, «трудятся безрассудно; толкуя о каком-то сгущении тонов и прикладывая уши, они извлекают звук как бы из ближайших звуков. Одни из них говорят, будто слышат какой-то отголосок в середине..., а другие спорят, что такое звучание в подобии доходит уже до тождества, но как первые, так и вторые ставят уши выше ума».

Здесь, несомненно, речь идет об изучении обертонов; повидимому имеются в виду обертоны квинты и октавы («в подобии доходит до тождества»).

Сократ упрекает далее тех, кто «уши ставит выше ума» в том, что «они в слышимых созвучиях ищут чисел, а к высшим опросам не

[1] Государство, 530 С.

восходят, чтобы наблюдать, какие числа созвучны, а какие нет и отчего бывает то и другое» [1].

В этой последней тираде мы имеем, в сущности, квинтэссенцию платоновского числового мистицизма. Здесь Платон являет себя продолжателем пифагорейской школы и сторонником «формального» направления в математике.

Если мы теперь спросим, чем же была математика для Платона, и кем был Платон для математики, то ответ может быть формулирован так: для Платона математика была не орудием познания внешнего мира и даже не наукой самой для себя, а средством внеопытного познания «сущего и невидимого». В руках Платона математика из «точной» науки становится наукой магической.

В «математических» рассуждениях Платона нет и следа той «строгости», которая характеризует собой математические исследования. Числовые соотношения просто навязываются природе, и притом без всяких оснований. Изучение же математики, как таковой, объявляется недостойным философа.

Поэтому Платон не был и не мог быть математиком, в подлинном смысле слова. Его роль в истории греческой математики — роль реакционная. Принимая во внимание то влияние, которым философия Платона пользовалась в древности, можно сказать, что Платон, как математик, был величиной большого абсолютного значения, но отрицательного знака.

Откуда же взялась тогда легенда о Платоне-математике? Ответить на этот вопрос будет очень легко, если мы посмотрим, каковы источники, на которых базируется оценка значения Платона в современной истории математики. Прежде всего поражает нас то, что современники Платона ничего не знают о его математических заслугах. Так Аристотель, ученик Платона, не раз упоминающий о нем в своих сочинениях, посвятивший много внимания критике учения Платона, нигде не упоминает о каких-либо открытиях Платона или вообще о его значении в истории математики. Все же сведения о математических открытиях Платона относятся к позднейшему времени. Впервые упоминает о Платоне-математике Герон, живший не менее, чем через 300 лет после Платона, в связи с нахождением «рациональных» прямоугольных треугольников. Главный же источник подобных сведений — комментарии к 1-й книге Евклида, составленные Проклом в середине V в. н. э. Прокл принадлежал к школе неоплатоников; большая часть его работ посвящена комментированию сочинений Платона. Нет ничего удивительного в том, что он готов был приписать Платону те открытия, которые ему хотелось бы считать платоновыми.

Насколько неубедительными для нас являются соображения Прокла в этом отношении, я покажу на одном из примеров. При этом я нарочно беру наиболее бесспорное для историков математики положение, что Платон первый формулировал так называемый аналитиче-

[1] Государство, 531 А.

ский метод доказательства. Это положение основано, прежде всего, на свидетельстве Прокла. Дадим же слово этому свидетелю.

Прокл, указав на то, что доказательство того или иного предложения есть по большей части дело находчивости автора, и нельзя дать общего метода для его раскрытия, продолжает: «Однако некоторые методы все же были указаны. Лучший из них — метод аналитический, который сводит искомое к уже известным началам (принципам). Говорят, что этот метод был сообщен Платоном Леодаму, и говорят, что последний при помощи этого метода открыл многое в геометрии. Второй метод — метод разделения, который, разлагая данное родовое понятие (genus) на части, дает исходный пункт для доказательства, удаляя все, что является чуждым для построения предложенного. Этот метод Платон также превозносил, считая его чрезвычайно важным для всех наук» [1].

Мы прежде всего видим, что сам Прокл не берет на себя ответственности за свои слова («говорят»); однако, он приводит это мнение очевидно потому, что считает его правдоподобным, ибо не дает ни своих ни чужих опровержений.

Гис [2] считает, что источником приводимого Проклом мнения послужило то место «Государства» Платона, где описывается метод, употребляемый диалектиками в их рассуждениях. Метод этот состоит в том [3], что доказываемое предложение рассматривается, как гипотеза; из этой гипотезы выводится ряд следствий, пока рассуждающий не придет к такому положению, которое принадлежит к «началам», т. е. обладает абсолютной достоверностью. После этого диалектик исходит от этого «начала» и, обратив цепь рассуждений, чисто умозрительным путем, не опираясь ни на какие «чувственные» предпосылки, приходит к «доказательству» того, что прежде принимал за гипотезу.

Этот метод представляет повидимому аналогию с тем математическим методом, который носил в древности название «аналитического».

Гис считает, что указанное предположение об источнике приведенного выше мнения Прокла подтверждается и тем, что «метод деления», о котором говорит Прокл дальше, есть как раз тот метод, которому следует Платон в изложении «Государства».

Однако тот же Гис справедливо отмечает, что, говоря о методе «диалектиков», Платон прямо противопоставляет его методу математиков, которые отправляются непосредственно от гипотезы, «не находя нужным дать в ней отчет ни себе, ни другим» [4] Таким образом Платон противопоставляет «синтетический» метод математиков «аналитическому» методу диалектиков. Кроме того о методе «диалектиков» Сократ (устами которого повествует Платон) говорит прямо, как о методе, хорошо известном его собеседнику. Наконец веским аргументом против принятия версии

[1] Цитирую по Кантору «Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik» Leipzig 1920, S. 210.

[2] Heath, The thirteen books of Euclid's Elements, V, I p., 134.

[3] «Государство», VI, 511.

[4] «Государство», VI, 510.

Прокла является и тот факт, что, если «аналитический» метод в той или иной степени играет роль в античной математике, то «метод деления», т. е. расчленения проблемы на частные случаи, абсолютно чужд классическому периоду. Он является характерным именно для упадочной эпохи, современной Проклу, и широко практиковался самим Проклом.

Прокл приписывает Платону и другие открытия в области математики (например, рациональные прямоугольные треугольники; определение прямой линии). Новейшие авторы следуют обычно традиции Прокла и других позднейших авторов неоплатоников [1].

Однако, почти каждый современный автор имеет свои особые пункты несогласия с традицией, что не мешает ему в общем и целом разделять ее. Чтобы не ходить далеко за примером, укажу на того же Гиса, критические взгляды которого только что были изложены. Но, расходясь с Проклом по вопросу о происхождении аналитического метода, Гис безоговорочно солидаризуется с Проклом в том, что Платон является автором определения прямой линии, бывшего в употреблении в доевклидовский период [2].

При этом Гис ссылается на место из диалога «Парменид», приводимое ниже. В этом диалоге Сократ и его ученики, с одной стороны, и элеаты Зенон и Парменид, с другой — беседуют на тему о том, едино ли сущее или множественно. Нам нет нужды следить за развитием этой основной темы. Мы обратимся прямо к интересующему нас месту, где Парменид исследует вопрос, исходя из предположения о том, что сущее едино [3].

...Парменид. Если единое существует, то единое не может быть множественным.

Аристотель. Как это было бы возможно?

Парменид. Но тогда у него не должно быть частей, и само оно не должно быть целым.

Аристотель. Как это?

Парменид. Ведь часть есть всегда часть целого?

Аристотель. Да.

Парменид. А целое? Не является ли целым то, у которого все части налицо?

Аристотель. Конечно.

Парменид. Значит, в обоих случаях единое состояло бы из частей, будет ли оно целым или будет оно иметь части.

Аристотель. Необходимо.

Парменид. В обоих случаях тогда единое было бы множественным, а не единым.

---

[1] Из известных мне авторов XIX и XX вв. только один Олманн (Greek geometry from Thales to Euclid, 1861) отказывается от традиции Прокла; однако он не задается вопросом о «магическом» использовании математики у Платона. Не пытается он также понять связь между «математикой» Платона и всем его мировоззрением.

[2] Heath, I. c., V. I, p. 165.

[3] «Парменид» 137 E; цитирую по немецкому изданию O. Эпльта, Platons Dialog «Parmenides», Leipzig, 1922, Verlag Meiner.

Аристотель. Так следует.

Парменид. Итак, если единое действительно едино, то оно не может ни быть целым, ни состоять из частей.

Аристотель. Нет, не может быть.

Парменид. Но если оно не имеет частей, то оно не имеет ни начала, ни конца, ни середины; ибо это были бы уже части его.

Аристотель. Конечно.

Парменид. Но начало и конец суть границы всякого предмета?

Аристотель. Само собой понятно.

Парменид. Итак единое безгранично, ибо оно не имеет ни начала ни конца

Аристотель. Да, безгранично.

Парменид. Следовательно также бесформенно, ибо ни к круглому, ни к прямому оно не причастно.

Аристотель. Как это?

Парменид. Круглое это то, концы чего от середины равно отстоят всюду?

Аристотель. Да.

Парменид. А прямое есть то, середина чего так расположена по отношению к обоим концам, что оно покрывает их?

Аристотель. Это так.

Парменид. Единое, таким образом, должно было бы иметь части и быть множественным, если бы оно было причастно к одной из этих форм: круглого или прямого.

Аристотель. Без сомнения.

Парменид. Следовательно оно не прямое и не круглое, так как оно именно не имеет частей.

Аристотель. Следовательно...

Мне пришлось утомить читателя длинной выпиской, но без нее осталось бы неясным, в каком контексте является место, на которое опирается Гис.

Из контекста явствует, что подчеркнутые мною слова Парменида представляют собою перефразировку (или даже точный текст) общепринятого определения окружности и прямой. Определение окружности совпадает с современным. Определение же прямой, несомненно, имеет происхождение из «провешивания» прямых линий на поверхности земли — метод, применявшийся в Греции и во всех других странах при планировании участков земли с незапамятных доисторических времен. Уже по одному этому было бы странно считать, что Платон является автором этого определения Но если бы даже допустить, что до Платона никому в голову не приходило формулировать определение прямой, опираясь на элементарный и повседневный опыт землемера, то и в этом случае невозможно допустить авторство Платона, ибо именно Платон был ярым противником того, чтобы математика вообще занималась предметами чувственного восприятия (см. приведенные выше выдержки из «Государства»); тем более недопустимо с точки зрения Платона

было апеллировать к чувству зрения («покрывает») в определениях основных понятий математики.

Приведенное место имеет огромное значение для истории математики, но не потому, что оно свидетельствует о математических открытиях Платона, а потому, что из него мы видим, что еще во время Платона ходячим определением прямой было определение, имеющее опытное происхождение; что даже Платон вложил его в уста действующего лица своего диалога [1].

Внимательный читатель узнает и знакомую уже нам манеру Платона «притягивать за волосы» математические понятия и примеры. Вместо того чтобы мотивировать бесформенность целого, например, тем, что не имеющее границ не может иметь и формы, Платон вкладывает в уста Парменида «математическую» тираду. Между тем из этого «математического» доказательства «следует» лишь то, что «единое» не может иметь формы прямого и круглого, но не кривого вообще (например параболы).

Впрочем существенно не это; существенным является то, что подчеркнутые места приведенной цитаты из «Парменида» никоим образом не дают основания приписать Платону открытие или формулирование определения прямой линии, и можно только удивляться, что такой глубокий знаток истории математики, как Гис, может разделять прокловскую традицию. Объяснения этому факту нужно искать конечно в причинах идеалогического характера.

Мне кажется, после всего сказанного, мы имеем полное основание, отказавшись от легенды о Платоне, утверждать, что Платон, который, несомненно, знал математику, как и другие науки своего времени, не играл и не мог играть в истории математики какую бы то ни было «положительную» роль. В какой степени воззрения Платона оказали задерживающее влияние на развитие математики и на ее преподавание — сказать конечно трудно. И именно потому, что Платон был «первоклассным» философом с остро отточенной философской мыслью,— именно поэтому должны мы констатировать, что Платон мистифицировал публику своей квази-математической аргументацией.

И особенно ясным это становится при сравнении Платона с другим великим философом древности — Аристотелем. Математические сочинения Аристотеля до нас не дошли, но в его чисто философских работах, как и в диалогах Платона, разбросано немало математических примеров, особенно относящихся к вопросам, пограничным с вопросами теории познания. Но в противоположность Платону у Аристотеля в этих примерах мы не найдем натянутости и произвольности толкования. Наоборот, некоторые места поражают нас своей глубиной и оригинальностью, стоящей вне всякого сомнения.

Рамки этой статьи не позволяют провести параллель между Платоном и Аристотелем; я постараюсь в другой работе уделить взглядам Аристотеля то внимание, которого они заслуживают. Здесь я огра-

[1] Можно было бы добавить, что в строго формальном «курсе» Евклида—III в. до-н. э. (который изгнал из геометрии даже измерение площадей, как таковое) определение прямой сохранило следы своего происхождения: «прямая линия есть линия, которая одинаково расположена со всеми своими точками».

ничусь указанием на то замечательное место «Физики», где Аристотель ставит и разрешает вопрос о бесконечном — вопрос, который вплоть до последнего времени являлся актуальным в математике. Аристотель [1] отчетливо разграничивает «две» бесконечности: актуальную и потенциальную. Только последняя, по Аристотелю, существует в природе; только с ней имеет дело и математика. Ибо, говорит Аристотель, математику нет никакого дела до того, «конечна» или «бесконечна» прямая: важно лишь то, что конечный отрезок прямой может быть продолжен настолько, насколько это угодно. «Правильный взгляд на бесконечное как раз противоположен обычно принимаемому: бесконечное это не то, что не имеет ничего вне себя, а то, что всегда имеет ч т о - н и б у д ь вне себя» [2].

В начале статьи я указал, что, несмотря на кажущуюся узость темы, поставленный в ней вопрос является актуальным для истории науки. Мне хотелось бы закончить ее указанием на то, что затронутые здесь вопросы имеют значение и для современности. В самом деле, ошибочно было бы полагать, что воззрения Платона на значение математики, на цели и методы ее преподавания и наконец его тенденция к «магическому» употреблению квази-математических рассуждений отошли безвозвратно в область прошлого. Нет, всюду, где имеется налицо родственная Платону идеология (а она порождается неизбежно существованием класса эксплоататоров, идеологом которого, правда, в других исторических условиях, был Платон), имеются налицо и элементы «платонизма»,— конечно в модифицированном виде.

Можно было бы проследить эволюцию «платонизма» на протяжении всей истории европейской математики в средние века и в новое время. Эта интересная работа, несомненно, будет выполнена когда-нибудь историком-марксистом. Здесь же я остановлюсь на нескольких примерах из недавнего времени.

«Педагогические» взгляды Платона (см. выше отрывки из «Государства)» нашли себе защитника в лице германского методиста М. Симона, который в своей книге, посвященной истории математики в древности [3], заявляет, что и для современной школы воззрения Платона не утратили своей силы. Кстати можно отметить, что тот же Симон в споре с недавно умершим Ф. Клейном горячо возражал против введения элементов высшей математики в программу стредней школы.

В качестве другого примера укажу на работу Н. А. Некрасова «Теория вероятностей» [4]. Чуть ли не половина этой книги посвящена доказательствам: бытия божия (стр. XXXIII—XXXVI, 16—17; 32; 42), необходимости царской власти (стр. 111—121); частной собственности (стр. 44) и т. д. Даже право царя на роспуск государственной думы аргументируется «математическими» доводами: «...Подобным образом математик, встряхивающий урну... открывает себе возможность перед новым испытанием свойств урны уничтожить

[1] Phys., III, 5—8.
[2] Phys., III, 207 a. Курсив мой.
[3] Max Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, Berlin 1909, S. 186.
[4] Н. А. Некрасов, Теория вероятностей, изд. 2-е, СПБ 1912.

сложившуюся в ней подтасовку с интригами»[1]. Я указал лишь некоторые отдельные места из книги Некрасова. Но любознательный читатель может быть избавлен от труда отыскивать страницы текста: он просто может открыть книгу на любой странице первой ее части, чтобы убедиться в том, что «может собственных Платонов российская земля рождать».

«Может» — потому, что, к великому огорчению, эти «собственные Платоны» не перевелись и в Советском союзе. Передо мною изданная в 1922 г. одесским отделением Всеукраинского государственного издательства брошюра А. Филиппова «Великий счет», которая на 22 страницах сообщает читателю об арифметических познаниях Будды, об измерении атомов, о размерах вселенной, об исчислении атомов и о трансфинитных числах Кантора. Автор поставил и точки над «i», начав свое произведение цитатой из Эдгара По и закончив такими словами: «И вместе с Платоном мы пожелаем, чтобы читатель вошел мыслью в созерцание природы чисел не для купли и продажи, как занимаются этим барышники, а для самой души — с целью облегчить ей обращение от вещей бытных к истине и сущности». Как видит читатель, платоновские взгляды не только исповедуются, но и проповедуются поныне.

Книжка Филиппова не единственная в этом роде. Укажу например на более «тяжеловесную» и по объему (65 стр.) и по содержанию книгу, вышедшую в том же году в Москве (изд. «Поморье»), П. Флоренского «Мнимости в геометрии», где возрожден квази-математический метод построения системы мироздания, какой мы видели в «Тимее». В результате автор приходит к системе «Птоломея-Данте» с неподвижной землей — центром вселенной! Но этого мало. «Опираясь» на принцип относительности, автор приходит к выводу о том, что граница земного мира находится где-то между орбитами Урана и Нептуна, а дальше идет мир небесный. «На границе земли и неба длина всякого тела делается равной нулю, масса — бесконечной, а время его, со стороны наблюдаемое,— бесконечным». Иначе говоря, тело утрачивает свою протяженность, переходит в вечность и приобретает абсолютную устойчивость. Разве это не есть пересказ в физических терминах признаков идей,— по Платону — «бестельных, непротяженных, неизменяемых, вечных сущностей?...»

Таким образом, платоновские тенденции еще проявляют себя и в наше время, независимо от того, находят ли они себе дорогу на книжный рынок или нет. Вот почему выяснение социально-идеологических корней легенды о Платоне и «разоблачение» этой легенды имеет не один только исторический интерес.

---

[1] Н. А. Некрасов, Теория вероятностей, изд. 2-ое, СПБ 1912, стр. XXXI.

М. Выгодский

«ИССЛЕДОВАНИЯ» МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

О книге Д. Д. Мордухай-Болтовского. «Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики»[1].

Рецензируемый том «Известий СКГУ» посвящен 30-летнему юбилею научно-педагогической деятельности профессора Д. Д. Мордухай-Болтовского. Естественно, что наиболее значительная как по содержанию, так и по объему (с. 35—129) часть сборника приходится на работы юбиляра, объединенные общим заголовком: «Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики».

Профессор Д. Д. Мордухай-Болтовской известен в кругах специалистов своими работами по разнообразным отделам математики; педагоги знают его по работам, посвященным вопросам преподавания математики в средней школе; ему принадлежит ряд учебников для высшей школы.

Библиографический указатель всех этих работ читатель найдет в рецензируемом сборнике (с. 7—12). Среди них встречаются и очерки по истории математики, но печатаемая в сборнике работа является первым появляющимся в печати большим историческим исследованием. Впрочем из предисловия автора мы узнаем, что это лишь небольшая часть его труда по истории математики, который уже давно был готов к печати и лишь теперь смог увидеть свет, хотя и в сильно урезанном виде.

Это обстоятельство очень характерно; оно свидетельствует о том, что в наших научных кругах занятия по истории науки не пользуются большим почетом, отношение к ним в лучшем случае снисходительное, и нельзя не пожалеть, что 30-летнего юбилея оказалось все же недостаточно для того, чтобы работа профессора Мордухай-Болтовского увидела свет полностью.

В настоящем своем виде она не представляет единого целого; это скорее ряд отрывков, мало связанных между собою. Читатель может судить об этом по названию глав: 1) Два основных источника методов решения уравнений: 2) Генезис современного числа. 3) Первые шаги буквенной алгебры. 4) Аксиоматика XVII в. 5) Генезис и история теории пределов. 6) Философские элементы в эволюции методических идей в математике первой половины XIX века.

---

[1] «Известия Северо-кавказского государственного университета». 1928, т. III. Математика и естествознание.

Мы не знаем, какой облик имела бы работа, напечатанная полностью, но в нынешнем ее виде она не дает представления об историческом методе и исторических взглядах автора. Важно для нас то, что автор не суживает предмета исследования, не ограничивается хронологией математических открытий; он подымается до общеметодологических обобщений; он ищет связи между математическими идеями и мировоззрением эпохи; он извлекает из истории математики уроки для современного преподавания математики. Прежде чем познакомить читателя с тем, как проф. Мордухай-Болтовской в указанных пунктах рвет с традиционным стилем историков математики (образцом которого может служить капитальный труд М. Кантора «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik»), я хотел бы обратить внимание на один, с моей точки зрения, наиболее существенный недостаток работы. Мы не находим в ней конкретных указаний на связь между математикой, естествознанием и техникой; историческая о б у с л о в л е н н о с т ь отдельных течений математической мысли не раскрывается перед нами. Не потому ли, что автор считает эти вопросы уже решенными? Такое толкование напрашивается, когда читаешь первые строки введения [1].

«В истории математики хорошо разработана та часть, которую можно назвать «анатомией»: хронология открытий, элементы, заимствованные и оригинальные в математике данного культурного периода. Разработана и «физиология»: развитие различных математических теорий мы представляем в зависимости от хода развития других явления культурной жизни. Но еще очень слабо затронуто то, что можно назвать «эмбриологией», т. е. генезис математических идей, начиная с их зарождения»...

Мне кажется, что изучение развития математических теорий в их связи с «другими явлениями культурной жизни» не только не поставлено еще на научную высоту, но находится еще в очень младенческом возрасте. Эта связь не изучена дальше того, что обнаруживается на поверхности исторического процесса; на более глубокое изучение не было обращено достат очного внимания.

Такое отсутствие внимания и интереса к наиболее, с нашей точки зрения, животрепещущим вопросам истории науки объясняется, как нам кажется, причинами социалогического порядка; буржуазные идеологи не оказались способными правильно поставить и разрешить эти вопросы. Перед марксистом открыто широкое поле применения метода исторического материализма к истории математики.

Итак, считая достаточно разработанной «физиологию» истории математики, проф. Мордухай-Болтовской находит, что «очень слабо затронуто то, что можно назвать эмбриологией», т. е. генезис математических идей, начиная с их зарождения.

Что понимается под «эмбриологией» математики, выясняется ближе в первой главе работы («Два основных источника методов решения уравнений» [2].

[1] Стр. 35.
[2] Стр. 36.

«Обычно,— читаем мы, история математики исследует ход развития идеи в вполне оформленном виде. Хорошо известны все факты, относящиеся к истории числовых уравнений, но не делаются попытки пойти вглубь, исследовать самые корни идей, лежащих в основе этих методов. Попытки таких исследований я хочу дать».

В чем же усматриваются автором «самые корни идей»? Для марксиста искание этих корней неразрывно связано с оценкой движущих исторических сил эпохи. Проф. Мордухай-Болтовского, как мы сейчас увидим, интересует не историческая, а логическая природа идей. Мы читаем вслед за цитированными строками:

«Я хочу показать, что эти идеи с психологической необходимостью должны были развиться из основных свойств нашего ума, причем хочу проследить, как самые примитивные методы должны были обратиться в современные совершенные» (Подчеркнуто мной — *М. В.*).

Из приведенных цитат мы видим, что автор далек от материалистического понимания истории математики, и становится ясным, что историческая обусловленность зарождения и развития математических идей должна лежать вне поля зрения проф. Мордухай-Болтовского. Это действительно и обнаруживает более детальное ознакомление с работой, и на это обстоятельство, как на крупнейший недостаток работы, я и хотел прежде всего обратить внимание читателя.

Ошибочно было бы однако думать, что проф. Мордухай-Болтовскому чужд историзм вообще; напротив, следует отметить, что его работа выявляет не только «стихийное» историческое чутье, но и четко осознанное стремление стать на историческую точку зрения.

В цитированном выше «введении» автор, указывая на трудности, связанные с изучением «эмбриологии» математики, продолжает: «очень легко впасть здесь в иллюзию и историческую эволюцию увидеть в искаженном виде. Это, между прочим, имеет место у математиков с недостаточно развитым историческим чутьем относительно XVII в., внешний (разрядка автора) облик которого может быть и похож на современную эпоху, но только внешний, так как более глубокое исследование вскрывает непроходимую пропасть».

В гл. IV («Аксиоматика XVII в.») автор конкретизирует это положение. Эта глава, по моему мнению, является интереснейшей частью работы; на ней я и остановлюсь подробнее.

«История неевклидовой геометрии,—так начинает автор [1],—дает богатейший материал для психологических размышлений. Как и в других случаях, мы здесь имеем перед нашими глазами эволюцию не только решения поставленной проблемы, но и самой ее постановки (разрядка моя—*М. В.*), так что в позднейшей стадии своего развития проблема так же мало похожа на то, что она была раньше, как старик похож на годовалого ребенка».

[1] Стр. 89.

Что «психологическая» постановка вопроса здесь мало уместна — об этом я говорил уже выше. Но что эволюционирует (и, я бы сказал, революционизируется) не только метод решения проблемы, но и проблема как таковая — эта мысль (а она является руководящей мыслью автора) глубоко верна.

Как видно из заглавия, предметом гл. IV является аксиоматика XVII в., и автор, излагая воззрение Паскаля, Декарта, Ньютона, Лейбница и др., пользуется каждым случаем для того, чтобы оттенить момент развития самой проблемы и в частности «вскрыть непроходимую пропасть» между аксиоматикой XVII в. и современной.

С точки зрения современной аксиоматики (Гильберт) доказать предложение — значит вывести его из аксиом, носящих строго формальный характер. Как аксиомы, так и выводимые из них предложения относятся к логическим символам. Очевидность или неочевидность не играют никакой роли. Аксиомы не отличаются от теории степенью очевидности того, что они утверждают; выбор аксиом является произвольным актом математика, ограниченным лишь требованиями непротиворечивости, независимости и полноты.

Напротив, в XVII в., как это показывает проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской, основным требованием, предъявлявшимся к доказательству, было требование очевидности; доказательство состояло в выведении неочевидных истин (теорем) из очевидных (аксиом). Вопрос о сведении числа аксиом к минимуму играл совершенно подчиненную роль. XVII в. знает и символические доказательства, но в то время как символ современного логиста лишен всякого содержания, символ Ньютона есть символ определенного объекта и наделен определенным содержанием.

Содержательность математических символов и понятий и требование очевидности аксиом — вот две тесно между собой связанные отличительные черты аксиоматики XVII в., стоящие в резком противоречии с тенденциями современной аксиоматики.

Что эти черты обусловлены исторически — это отчетливо выясняет проф. Мордухай-Болтовской. Он видит связь их с философией эпохи (Декарт, Паскаль) и, цитируя «правила» Паскаля, замечает: «Эти правила, не выдумка самого Паскаля, а выражение того, что в его время думали, разъясняют сущность идеографических опытов XVII в., например, Ньютона (разрядка моя. *М. В*).

Автор не только излагает воззрения математиков XVII в., но и стремится до известной степени стать на их точку зрения. В общем, это ему удается, и это составляет одно из ценных качеств его работы. Повидимому симпатии автора находятся на стороне современного аксиоматического метода; но историческая объективность изложения заставляет порой сомневаться в этом.

Так по вопросу о критерии очевидности аксиомы мы читаем: «Гильберту при выборе своей минимальной системы постулатов приходится ограничиваться положениями очевидными, ибо иначе геометрия перестала бы убеждать (разрядка моя.—*М. В.*). Он позволяет только быть менее требовательным в этом отношении. Если бы он отверг требование очевидности, то, может быть, достиг

бы еще большего сокращения основных постулатов, но его геометрия тогда никого не убедила бы».

Не знаю, согласится ли Гильберт с такого рода толкованием; думаю, что нет. Во всяком случае эта реабилитация критерия очевидности свидетельствует о том, что автор относится критически к методам современной науки, даже наиболее «модным».

Проф. Мордухай-Болтовской не игнорирует современного аксиоматического метода; он принимает его как ценное орудие исследования: «Попыток построения геометрии при минимуме основных неочевидных положений еще не боло сделано; но они были бы необычайно интересны: в наличии тех или иных теорем они никого не убедили бы, но они дали бы знание с точки зрения будущей науки не менее ценное — знание логических связей между положениями геометрии, иных, чем те, с помощью которых убеждаются в их истинности».

Принимая аксиоматический метод исследования, необходимо всегда помнить об его ограниченности и не видеть в нем содержания науки, а в его последовательном проведении — идеала науки, как представляется многим математикам. Такой вывод, хотя он и не делается автором «Исследований», невольно напрашивается читателю, и этот вывод, на мой взгляд, правилен.

На этом мы можем покончить с гл. IV, проходя однако мимо целого ряда вопросов, заслуживающих внимания, с тем, чтобы хотя бы бегло обозреть следующие две главы.

Гл. V («Генезис и история теории пределов») начинается «эмбриологией» идеи переменного и функции: в учении средневековых схоластов об интензировании и ремизии форм автор подчеркивает те элементы, которые как бы предвосхищают учение о переменной величине, пределе и о бесконечно-малой величине.

Эти исследования очень интересны. По поводу их необходимо прежде всего заметить, что сжатость изложения доходит здесь до последней степени, что читается работа с громадным напряжением, как будто это резюме какой-то большой работы, сделанное на 4 страницах. Такая сжатость объясняется, вероятно, невозможностью напечатать работу целиком.

Далее, указав на интереснейшую параллель между схоластической философией и математическими идеями XVIII в., автор оставляет открытым вопрос об объяснении этого параллелизма. Имеет ли здесь место наличие однородных причин и независимое развитие или влияние схоластической мысли на математику XVIII в. осуществляется в порядке исторической преемственности или, быть может, параллелизм этот носит лишь внешний, поверхностный характер?

Возможно, что этот дефект работы является результатом того сжатия, которому работа подверглась по независящим от автора обстоятельствам, и тогда, разумеется, замечание мое относится не к автору работы, а к ее издателю.

В дальнейшем автор столь же сжато (хотя эта сжатость легче переносится, когда изложение становится математическим по преимуществу), дает очерк развития теории пределов в XVIII в., который заканчивается схематическим очерком: «Логизация идеи пределов»

Автор видит три существенных этапа в развитии понятия предела. Первый этап: предел как последнее значение переменного — он существует так же, как существует каждое значение переменного (Лейбниц, Ньютон). Чрезвычайно интересно, что в этом пункте проф. Мордухай-Болтовской расходится с общепринятым мнением, согласно которому Ньютон предвосхитил позднейшую концепцию предела как величины, к которой переменная стремится так, что разность между ними может быть сделана сколь угодно малой. Проф. Мордухай-Болтовской считает, что для Ньютона предел был «последним» значением переменного.

Вопрос этот имеет громадный интерес для историка математики; к сожалению, и ему автор посвящает лишь полстраницы. Тем менее имею я возможность распространяться на эту тему. Замечу лишь, что я считаю эту точку зрения автора правильной.

Итак на первом этапе развития предел является лишь последним значением переменного.

На втором этапе предел есть «то, к чему переменное бесконечно приближается, никогда с ним не совпадая (разрядка принадлежит автору), его бытие вроде бытия кантовской вещи в себе относительно мира явлений: он вне сферы изменения переменного. Третий этап — это уничтожение реальности предела даже в указанном смысле, что соответствует переходу от кантовской точки зрения к махистско-авенариусовской, упраздняющей вещь в себе; предел выступает в виде символа, сгущающего ряд чисел».[1]

Эта схема очень интересна. Брошенная вскользь мысль о роли кантианства и махизма в истории математики — оригинальна, и на мой взгляд, будучи развита, должна содержать много верного.

Замечательно также то, что автор заявляет категорически о непригодности этой концепции в геометрии.

«В геометрической теории пределов предел конечно ни в каком случае не может быть сведен на роль только символа, как в арифметической; и вот между арифметикой и геометрией начинается разделение, начинается разарифметизирование геометрии. За геометрическими пределами оставляется реальное (разрядка автора), а не только символическое значение».

Что касается положения о том, что предел в геометрии не есть «голый» символ, то оно, на мой взгляд, неоспоримо. Но я считал бы полезным пойти дальше и поставить вопрос: имеет ли какое-либо значение «символическое» истолкование предела и в арифметической теории? Ведь эта теория возникла и существует для овладения метрическими проблемами геометрии. Ответить на этот вопрос — значит определить свою позицию не только по отношению к теории пределов, но и к коренным проблемам математической логики: проблеме существования в математике, проблеме о предметности математики и т. д. Очень жаль, что на этот вопрос работа проф. Мордухай-Болтовского ответа не дает.

---

[1] Стр. 116.

Переходя к краткому обозрению шестой главы («Философские элементы в эволюции методических идей в математике первой половины XIX в.») следует с сожалением вновь констатировать конспективный ее характер.

Автор констатирует наличие неразрывной связи, существующей между различными отраслями «деятельности человеческого гения». Не касаясь общего вопроса о причинах и формах проявления этой связи, он однако утверждает, что связь между философией и математикой не всегда носит характер влияния первой на вторую и что наиболее отчетливо наблюдается это влияние «на низах, а не в верхах эволюционирующей математической мысли. Для исследования его следует брать учебник, а не научный мемуар».

И автор показывает далее, как на методике преподавания математики в школе Песталоцци сказывается влияние гносеологических воззрений Канта. Далее следует параграф «Кант и Рибо». Затем автор переходит к влиянию Гегеля.

Наиболее существенной чертой этого влияния является проникновение в математику идеи отказа от закона противоречия. Проф. Мордухай-Болтовской приводит следующий пример: в учебнике Бескибы (1826) мы находим такое определение: «предел это наиболее внешнее вещи, в чем снимается то, что было, и начинается то, чего не было» [1].

Далее он усматривает влияние Гегеля во внедрении так называемых «несобственных элементов» геометрии. «Угол, по Бертрану [2] определяется как часть плоскости, ограниченная двумя пересекающимися прямыми. Но уменьшайте также смежный угол. В пределе пересечения уже не будет, и одна сторона будет служить продолжением другой. С одной стороны, это угол. Ибо, если это не угол, то можно спросить, с какого же момента $\angle AOB$ перестает быть углом. С другой стороны, мы можем сказать, что это не угол, ибо мы имеем не пересекающиеся, а совпадающие прямые. Таким образом выступает понятие развернутого угла; прямой угол определяется как половина развернутого угла, так что в последовательных учебниках отпадает теорема о равенстве двух прямых углов. Доказательство же теоремы о сумме двух смежных углов сводится просто к замечанию, что эта сумма равна развернутому углу, уже по самому определению прямого угла вдвое большему последнего».

Я привел этот отрывок полностью, чтобы показать на примере, как от исторических изысканий протягиваются нити к повседневной работе педагога, который не может не оценить выгоды, даваемые таким, диалектическим по своей природе, методом изложения школьного курса геометрии. Добавляю еще, что этот метод изложения с успехом может быть проведен и в других главах геометрии (например в главе о касательных к окружности) и служит хорошим подготовлением к анализу бесконечно-малых.

---

[1] Стр. 125.
[2] Стр. 118.

Далее автор констатирует, что бесконечно-удаленная точка и другие несобственные элементы проективной геометрии «являются в гегелевском смысле диалектическими элементами геометрии».

Эта, на мой взгяд, правильная мысль требует однако своего развития. С одной стороны, интересно было бы выяснить точку зрения самого Гегеля на единство противоположностей в математическом понятии. С другой стороны, важно было бы выяснить методологические недочеты современного «конвенционалистского» отношения к несобственным элементам, согласно которому например понятие бесконечно удаленной точки не содержит ничего большего, чем дано в понятии пучка параллельных прямых.

Из приведенного выше беглого обзора содержания трех последних глав работы проф. Мордухай-Болтовского общий облик ее, мне кажется, достаточно выявляется

Резюмируя, можно сказать, что ее интерес и высокое достоинство состоит в том, что автор не отрывает математику от философии; в том, что он дает много ценного материала для педагога; в том, что он оригинален во многих высказываниях; в том, что он использует громадный материал, подчас совершенно новый для историка математики. Литература, использванная автором,— почти сплошь первоисточники; в подстрочных примечаниях приведены литературные указания, обнимающие несколько сот мемуаров, учебников и книг, многие из которых — библиографические уникумы.

Чрезвычайно ценно и то, что автору чужда тенденция проектирования прошлого на экран современности; ему хочется и часто удается стать на точку зрения эпохи, им разбираемой.

Но, умея с т а т ь на точку зрения эпохи, автор не пытается о б ъ я с н и т ь эту точку зрения,— это один из важнейших пробелов работы. Далее, мы видели, что исторические связи выступают у автора как связи психологические и логические. Отсюда можно сделать вывод о том, что материалистическое понимание истории чуждо автору, и это — с точки зрения материалиста — большой дефект.

Наконец доходящая до невероятных размеров сжатость изложения также не может быть отнесена к достоинствам работы.

Что касается внешней стороны, то следует отметить крайне небрежное отношение к этимологии и синтаксису русского языка; число опечаток очень велико, отдельные слова искажены до неузнаваемости; подчас трудно бывает установить смысл фразы. Конечно этот упрек относится не к автору работы; но нельзя умолчать о «шедеврах» такого рода: «Геометрия, которая через Бертрана шла к Лежандру, уже постулирующему взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами. Для Лежандра всякое отношение — число рациональное или иррациональное» [1]. Абзац кончен. Напрасно вы будете искать сказуемое в первом предложении.

В следующей фразе требуется найти подлежащее: «При взгляде Лейбница [2], по которому доказательство выводом положения из поло-

[1] Стр. 86.
[2] Стр. 102.

жений очевидных является незаконченным, по существу обладает тем же недостатком, что доказательства из неочевидных положений, ибо те и другие как очевидные, так и неочевидные, следует непосредственно или с помощью принципа противоречий свести к положениям тожественным».

Как видит читатель, эта фраза совершенно непонятна. Вообще, следует сказать, что стиль работы очень тяжелый, трудно понятный. Это обстоятельство делает ее, к сожалению, недоступной сколько-нибудь широкому кругу читателей.

Остается еще указать на то, что автор совершенно не пользуется новейшей литературой, в литературных ссылках почти не встречаются работы, вышедшие за последние 20 лет. Вероятно, объясняется это тем, что работа была написана давно и лежала, ожидая издателя. Следует приветствовать факт появления такого издателя в лице СКГУ, но вместе с тем выразить надежду, что мы еще увидим в печати работу проф. Мордухай-Болтовского, хотя бы на одну из затронутых им тем, но не урезанную в своем изложении. Эта работа будет полноценной, если она будет рассчитана не только на специалистов, но и на широкие круги читателей и, прежде всего на учащуюся молодежь. Нам нужна серьезная книга по истории науки, и книга живая, из которой читатель почерпнет новое и важное для сегодняшних проблем методологии и методики математики. Таких книг у нас почти нет, и тем большая в них нужда. Было бы очень печально, если бы осталось неиспользованным то богатство мыслей и знаний, которое рассыпано на страницах «Известий Северо-кавказского университета»

З. Цейтлин

Ф. КЛЕЙН

Исследование Клейна о развитии математики в XIX в. заслуживает особого внимания. Работа Клейна является не просто историей математики, а историей математики, написанной Клейном. Клейн же — весьма редкий и своеобразный для нашего времени тип ученого математика, деятельность которого носила широкий исторический характер и исследование которого по эволюции математики является живым историческим отчетом [1]. Клейн неоднократно жалуется, что в современном буржуазном обществе к управлению государством призываются юристы, в то время как в эпоху французской революции выдвигались математики и физики. Эти жалобы весьма характерны для Клейна, как человека, пропитанного духом истории и постоянно стремившегося придать своей деятельности историческую ориентировку. Курант в своем некрологе сравнивает Клейна с летчиком, который, забравшись на большую высоту и исследуя с высоты полета общий характер местности, не в состоянии останавливаться на мелких деталях и их оценивать. Научная кисть Клейна действительно рисовала широкими мазками. Ему была чужда ювелирная отделка деталей, и в этом именно некоторые усматривают основной недостаток научных работ Клейна, противопоставляя их работам его соперника Пуанкаре. Последняя точка зрения не является правильной. Недостаток ювелирной отделки деталей образует существенное достоинство Клейна как ученого. Клейн не был бы Клейном, если бы занялся ювелирной обработкой своих идей. Такая вещь является немыслимой, ибо идеи Клейна обнимают область всей математики, проникают в физику и соприкасаются с техникой. Не останавливаясь здесь на всесторонней оценке Клейна как мыслителя и организатора, которую интересующийся читатель найдет в указанной в примечании литературе, мы приведем лишь некоторые характерные места из статей Фрике и Куранта. Фрике оценивает Клейна как «собственно завершителя дела Римана в его главной области

[1] Оценку значения Клейна см. «Die Naturwissenschaften» 1919 г., № 17 и 1925 г. № 37. Фрике, Фосс, Витингер, Шенфлис, Каратеодори и Курант характеризуют деятельность Клейна как ученого математика, Зоммерфельд оценивает его как физико-математика, Тимерцинг — как педагога и наконец Прандтль рисует отношение Клейна к развитию техники. Так как историческое исследование Клейна не является во всех частях общедоступным, то в качестве введения к нему, сравнительно элементарно излагающего общую линию клейновских идей, можно рекомендовать замечательное сочинение Клейна «Elementar Mathematik vom höhoren Standpunkte». Имеется русский перевод первой части под названием «Вопросы элементарной и высшей математики», изд. «Mathesis», 1912 г.

теории функции». Курант пишет: «Если современная математика со спокойным самосознанием может дальше строить на фундаменте, заложенном Риманом, то это является величайшей и решающей заслугой Клейна». Курант сравнивает «Erlanger Programm» Клейна, в которой последний сформулировал свои руководящие идеи, с периодической системой элементов: «Эрлангерская программа дает геометрии такой же силы организующий принцип, какой дает химии периодическая система элементов».

Фрике отмечает г е н и а л ь н у ю способность Клейна находить внутреннюю связь между различными областями математики: «Метод Клейна основывается именно на гениальной способности Клейна узнавать внутренние связи между различными математическими дисциплинами».

Лейтмотивом исследования Клейна по эволюции математики в XIX в. является поэтому принцип единства математического познания. Клейн подчеркивает [1], что тенденция разлагать науку на изолированные отдельные главы, тенденция создавать научные школы и секты на основе различия трактовок заключает в себе определенную опасность для прогресса науки. Одностороннее и гипертрофированное развитие этой тенденции привело бы к смерти науки («würde den Tod der Wissenschaft herbei zu führen»). «Мы сами,— пишет Клейн,— всегда стремились к обратному. В нашем поколении мы всегда более или менее держали в контакте: 1) теорию инвариантов, 2) теорию уравнений, 3) теорию функций, 4) геометрию и 5) теорию чисел. И это было нашей особой гордостью».

К списку Клейна необходимо прибавить чрезвычайно важный пункт, именно пункт о контакте математики с науками о природе — механикой и физикой. Клейн действительно всю жизнь поддерживал этот контакт, и его книга в значительной мере является также историей развития теоретической механики и физики в их связи с математикой. Клейн — ученик Плюкера, который одновременно был крупным геометром и выдающимся физиком. В 1866 — 1868 гг. Клейн состоял при Плюкере ассистентом по физике, а в 1871 г. он читал в Геттингенском университете цикл лекций на тему: «О взаимоотношении сил природы и законе сохранения силы». Плюкер воспитал в своем ученике любовь к конкретному мышлению. Клейн неоднократно повторяет выражение Клебша (в его биографии Плюкера) о том, что характерным признаком истинного геометра является р а д о с т ь, вызываемая ф о р м о й («Die Freude an der Gestalt»).

Замечательным примером конкретности мышления Клейна является его знаменитое исследование алгебраических функций при помощи физически сконструированной особого рода поверхности (так называемой римановой многолистной поверхности), к двум точкам которой подводится при помощи гальванической батареи электрический ток (стр. 260, т. I [1]). По выражению Куранта Клейн, следуя Риману, развивал систему «ф и з и ч е с к о й м а т е м а т и к и».

[1] Том I, стр. 327.

Стремясь к конкретному мышлению, Клейн не мог не относиться отрицательно к математическому и физическому формализму. В своей характеристике Кирхгофа (стр. 219, т. I) Клейн отвергает знаменитое положение эмпириокритической философии, родоначальником которого эмпириокритики считают Кирхгофа: цель науки — не объяснение, а лишь полное и простейшее описание явлений природы: «Я не могу скрыть,— пишет Клейн,— что такое понимание естествознания мне крайне антипатично («aüsserst antipatisch ist»), потому что оно связывает радость учения и стремление (den Trieb) к дальнейшему исследованию».

Отрицательное отношение Клейна к эмпириокритицизму не является однако результатом какой-либо продуманной философской точки зрения. Из многих мест работы Клейна и из других его высказываний видно, что Клейн относился к философии несколько прохладно. В своем выступлении в венском философском обществе (1905 и 1906 гг. [1]) Клейн подчеркнул: «По отношению к философии я предпочитаю выражаться совсем скромно, в частности по отошению к Канту я не беру на себя смелости ни осуждать его, ни признавать».

Неудивительно поэтому, что Клейн наравне с филистерами приписывает философии Гегеля тормозящее влияние на развитие науки [2]. Клейн оправдывает пошлый эмпиризм бывшего аптекаря Поггендорфа как реакцию против спекулятивного гегельянства, хотя в действительности, как это указал Энгельс, натурфилософия Гегеля была гораздо выше современного ему фармацевтического эмпиризма Поггендорфов.

Неудивительно также, что у Клейна самое превратное представление о сущности диалектической логики.

В главной теории алгебраических целых чисел [3] Клейн вскрывает часто имеющую место мистификацию так называемых «идеальных чисел» Куммера. Числа Куммера являются идеальными лишь по отношению к особо определяемым числовым областям, но сами по себе они являются вполне конкретными числами, например $\sqrt{2}$, i, и т. д. Клейн указывает, что сам Куммер виноват в мистификации своих чисел, так как он во многих местах своих работ выражается так, как будто речь идет о факторах, не существующих in concreto, а лишь символически мыслимых. Куммер сравнил свои идеальные числа с фтором, который химики называют газом, но который в эпоху Куммера химики не умели еще изолировать.

Эту изоляцию произвел, как известно, химик Муассон. Клейн по этому поводу восклицает: «Da sieht man was es mit der dialektischen Logik auf sich hat».

---

[1] См. «Новые идеи в математике», сбор. № 8.

[2] Том I, стр. 221. Интересно отметить, что Клейн был родственником Гегеля: жена Клейна — внучка «великого немецкого философа, дочь историка Карла Гегеля. В 1870 г. Клейн написал работу о некоторых кривых на так называемой поверхности Куммера. Причудливыми арабесками, которые образуют эти кривые, Клейн украсил бальное платье своей невесты Анны Гегель. Вот до чего доходил синтез теории и практики у Клейна. Приведенный факт очень выпукло рисует живую личность немецкого ученого.

[3] Стр. 302.

Таким образом по Клейну диалектическая логика — это логика голой спекуляции, опровергаемой конкретным исследованием.

Клейн часто упрекает потому философов, что они своими спекулятивными идеями тормозили развитие науки. Например «упрямые рационалисты» («unverständige Rationalisten») выдвинули возражения против принципа Гамильтона, усмотрев в нем телеологию вследствие «исконного пристрастия философов» («aus der ursprünglichen Vorliebe der Philosophen») к подобного рода принципам, как выражению целевой идеи [1]. Точно так же «философы и мистики всякого рода» («Philosophen und Mystiker aller Art») помешали развитию неевклидовых геометрий, неправильно толкуя понятие гауссовой меры кривизны и стремясь придать этому якобы имманентному математическому понятию трансцендентный смысл [2].

Приведенные замечания показывают, в чем основной недостаток работы Клейна. История математики в XIX в. написана Клейном так, как писались истории философии до Гегеля, т. е. без систематического, объединяющего исторического принципа. До Гегеля история философии была историей борьбы воззрений и мнений отдельных философов. Гегель первый на идеалистической, правда, основе, но гениально вскрыл закономерность и систему развития философских взглядов.

Марксизм, отвергая систему Гегеля и коренным образом перерабатывая его диалектический метод, следует однако за Гегелем в его понимании истории мышления как связанного и закономерного диалектического развития. Определяющим, в конечном счете, эволюцию мышления фактором является с точки зрения марксизма эволюция производительных сил общества; тем не менее история мышления имеет также свою имманентную диалектику, что и образует существенную трудность марксистской истории философии и науки.

Такая история еще не написана, но энергичная подготовительная работа по собиранию материалов начата.

Книга Клейна чрезвычайно ценна как материал для будущей марксистской истории мышления. Написанная крупнейшим математиком-специалистом, выдающимся эрудитом в области механики и физики, да сверх того талантливым и страстным педагогом, история математики Клейна дает за некоторыми исключениями великолепную картину основных моментов имманентного диалектического движения математической мысли истекшего столетия.

Не имея возможности подробно останавливаться на богатейшем содержании рецензируемой работы, мы отметим лишь самое существенное.

Прежде всего фактическая философская установка Клейна бесспорно материалистическая. Клейн решительно отвергает например о д н о с т о р о н н о с т ь ходкого среди многих естествоиспытателей определения задачи математического естествознания как объяснения природы: «Не объяснение природы,— говорит Клейн, повторяя Бэкона,— а п о к о р е н и е природы является ее (науки) собственно

[1] Том I, стр. 199.
[2] Том I, стр. 153.

задачей. Не следует никогда забывать, что существует творческая техника, которая переводит в дело (die Tat) положения теоретической науки» [1].

Клейн прибавляет, правда, что наука в конечном счете не в состоянии «объяснить» природу, но такая оговорка у Клейна чисто словесная и является результатом философского дилетантизма, не ориентирующегося в соотношениях между теорией и практикой и не различающего объяснения природы и ее покорения.

Что указанная оговорка не имеет у Клейна эмпириокритического смысла, видно, во-первых, из отрицательного отношения Клейна к эмпириокритицизму вообще, а во-вторых, из одного его замечания по поводу математики Сильвестра, который стремился толковать химические отношения атомов как логические отношения понятий, а посему с усмешкой отвергал представление о соединяющихся конкретных атомах. Клейн замечает: «Это во всяком случае не то теоретическое основание («gedankliche Grundlage»), на котором наука добивается своих успехов» [2].

Клейн оценивает Паункаре как тип ученого ниже Архимеда, Ньютона и Гаусса вследствие того именно, что последние занимались конкретной экспериментальной работой и измерениями [3].

Наряду с элементами материализма у Клейна выступают элементы диалектики. Руководящий принцип Клейна — единство математического познания — является диалектическим приципом, так как Клейн понимает единство не только в смысле имманентного математического единства, но и в смысле единства математического и физического познания и технического действия, т. е. как единство мышления, отображающего диалектическое единство природы и человеческой практики, покоряющей природу на основе науки.

Идеальным типом ученого является для Клейна Гаусс, с характеристики которого начинается книга.

Клейн анализирует сначала работы Гаусса по «прикладной математике», астрономии, геодезии и физике. Клейн усматривает гениальность и величие Гаусса в том, что последний, твердо стоя на почве реальности, не впадал в эмпиризм и умел достигать необычайных теоретических высот мысли.

Работая например над вопросом об определении орбиты Паллады, Гаусс пришел к важной концепции гипергеометрического ряда, имеющего большое значение в теории функций. Другие чисто практические работы Гаусса в области геодезии привели его к обоснованию неевклидовой геометрии и к формулировке важного метода имманентного изучения поверхностей посредством аналитического определения элемента длины и меры кривизны на поверхности. Клейн приводит подробный характерный пример синтетического характера мышления Гаусса, именно его трактовку эллиптических функций в связи с геометрией и теорией чисел [4]. Именно Гауссу принадлежит важная концеп-

[1] Том I, стр. 199.
[2] Там же, стр. 163.
[3] Там же, стр. 376.
[4] Том I, стр. 35.

ция геометрической числовой решотки, которая дает весьма наглядное и могущественное орудие изучения свойств функций. Благодаря синтезу геометрии, анализа и теории чисел Гаусс превзошел в теории эллиптических функций Якоби и Абеля, так как владел теорией так называемых модуль-функций, заново развитой (в частности самим Клейном) несколько десятков лет после смерти Гаусса, который не опубликовал значительной части своих исследований. В этом последнем обстоятельстве Клейн усматривает характерную черту ученых XVIII в. Будучи страстным педагогом, Клейн, бесспорно преувеличивая, считает типичным для ученых XIX в. стремление к учительству, к прозелитизму: повышенная учебная деятельность среди широкой публики, создание школ, оживленные сношения с учеными всех стран — вот что по мнению Клейна особенно характерно для исследователей XIX в. Можно привести ряд примеров (например Эйлера), опровергающих концепцию Клейна и иначе объясняющих приводимые Клейном факты. Бесспорно однако, что в XIX в. наука значительно демократизировалась и приобрела более или менее отчетливый интернациональный характер, но это произошло отнюдь не от того, что ученые XIX в. были свыше одарены особой страстью к прозелитизму, а вследствие более глубоких общественных причин. Интернационализация науки и характер этой интернационализации являются следствиями развития капитализма и империализма в XIX в., развития городов, путей сообщения, интенсификации обмена, колониальной экспансии, военного соперничества, мирового рабочего движения и т. д.

Сам Клейн дает во второй главе блестящую характеристику знаменитой Ecole Polytèchnique, выросшей из недр французской революции и замечательно воплотившей в себе черты, которые Клейн считает типическими для ученых XIX в. Клейн особенно тепло пишет о деятелях французской политехнической школы, так как они являются живым доказательством убеждения Клейна в том, что наука тесно связана с жизнью и вырастает из практики.

Упадок научного творчества во Франции после 30-х годов Клейн усматривает в нарушении равновесия между теорией и практикой («Theorie und Anwendung»), а само это нарушение объясняет (!) из общего психологического закона: народы, как и индивидуумы, после напряженных творческих усилий устают и стремятся к отдыху [1]. Психологическое объяснение Клейна не выдерживает, разумеется, никакой критики. Вопрос о характере и колебаниях творческой продуктивности отдельных народов и стран является настолько сложным, что решать его при помощи поверхностной и общей концепции «усталости»—значит отказываться от серьезной постановки вопроса, прикрываясь фразой. Мы не будем, понятно, останавливаться здесь на этой глубокой и интересной теме.

В главе о политехнической школе обращает на себя внимание одно место, где Клейн, говоря о Коши, пытается установить связь между характером математического мышления и общим политическим,

[1] Том I, стр. 88.

социальным и религиозным мировоззрением ученого [1]. Клейн определенно утверждает, что такая связь существует, и тем самым делает ценное для марксиста признание о наличии классовых элементов даже в такой абстрактной науке, как математика.

Глава о политехнической школе особенно ценна тем, что она очень современна. Ведь у нас, к сожалению, существуют еще ученые, которые в требовании связать науку с технической и промышленной практикой усматривают угрозу научному прогрессу, угрозу «возвышенной», «чистой» науке.

Деятельность ученых политехнической школы опровергает это филистерское предубеждение. В недрах Ecole Polytéchnique были заложены основы и методы самой «чистой» и «возвышенной» научной теории.

Достаточно назвать имена Пуассона, Фурье, Коши, обоих Карно, Понселе, Кориолиса, Монжа, Дюпена и наконец Галуа, чтобы убедиться в том, насколько плодотворна связь теории с практикой.

Из существенных достижений ученых политехнической школы мы отметим здесь лишь создание качественной или проективной геометрии Понселе, Монжем и Карно старшим и глубокое обоснование качественного функционального анализа в форме теории групп Галуа [2].

Здесь перед нами не просто выдающиеся научные достижения, а достижения методологические и следовательно гениальные, так как метод в науках — это главное.

Эпоха средневековья была эпохой качественного анализа вообще. Декарт подчинил анализ качества анализу количества, и с тех пор в «точных» науках **формально** господствует количественный анализ.

Среди широкой публики и даже очень образованных людей математика например до сих пор считается наукой о количестве. Между тем, как это блестяще доказывает Клейн в своей книге, качественный математический анализ имеет громадное значение для математики, и лишь синтез качественного и количественного метода истинно плодотворен для науки. С точки зрения диалектической логики, учащей о единстве количества и качества, это положение является элементарным, но одно дело — философская истина, а другое — ее конкретное воплощение.

Это конкретное воплощение достигается длинным трудным путем развития науки. Обоснованный французами качественный геометри-

---

[1] Том I, стр. 71.

[2] Во избежание недоразумений заметим, что, говоря **о качественном** математическом методе, мы имеем в виду **преобладание** качественного момента над количественным. Качество и количество образуют единство, так что не существует чисто качественных или чисто количественных методов. Но абстрактное различение качества и количества является реально обоснованным; вот почему существует преобладание качественного метода над количественным например в общественных науках, или преобладание количественного метода над качественным например в математике вообще. Внутри различных научных дисциплин существуют также области со своеобразным отношением качественных и количественных методов исследования, например в топологии преобладает качественный метод и т. д.

ческий анализ развивается сначала немецкими учеными, группировавшимися вокруг журнала Крелля — Мебиусом, Плюкером и Штейнером (гл. IV). Уже в Ecole Polytèchnique наметилась борьба геометрических школ—аналитической и синтетической; эта борьба обострилась среди немцев: синтетик Штейнер при поддержке Якоби ожесточенно выступал против аналитика Плюкера. В действительности Плюкер никогда не был чистым аналитиком, а подобно своему ученику Клейну стоял на точке зрения синтеза качественного и количественного методов. Работа немецких геометров привела к созданию математического учения, которое Клейн обозначает как алгебраическую геометрию. Алгебраическая геометрия развивалась в двух параллельных направлениях—в направлении чисто проективной геометрии (Штаудт, Шаль, Кели) и системы общей геометрии (в частности неевклидовой) на проективной основе (Клейн, Бельтрами, Клиффорд) в направлении теории алгебраических форм и инвариантов (Якоби, Гессе, Кели, Сильвестр, Сальмон).

Здесь перед нами важный пример значения принципа единства математического познания. Проективная, аффинная и метрическая геометрии имеют дело с инвариантными свойствами геометрических объектов. Количественное выражение геометрических отношений при помощи алгебраических и диференциальных функций привело к созданию общей теории инвариантов математических форм. Обратно, теория инвариантов определенных групп преобразований приводит к единой классификации различных родов геометрий, математических функций и физических соотношений (теория относительности).

К важным достижениям развития алгебраической геометрии необходимо также причислить развитие учения о многомерном пространстве (Лагранж, Коши, Кель, Плюкер, Риман и учение об общих комплексных числах (Ausdehnungslehre Грассмана, «Кватернион» Гамильтона). Развитие математики в XIX в. шло в теснейшем контакте и под сильным воздействием развития механики и физики. Клейн посвящает обширную главу (гл. V) характеристике механики и математической физики в Германии и Англии до 1880 г.

Здесь необходимо отметить философскую ошибку Клейна, а именно: его квалификацию физики Максвелла как феноменологической физики. Совершенно непонятным образом Клейн определяет физику, оперирующую с непрерывными средами, как физику феноменологическую в отличие от атомистической, оперирующей с материальными частицами [1]. Между тем центр тяжести феноменологической точки зрения совсем не в оперировании непрерывными средами или в их отрицании и замене атомистическими представителями. Можно например быть атомистом, но вместе с тем и феноменологом—все зависит от того, какое гносеологическое значение придается понятию атома. Существенным для феноменологии является отрицание или полуотрицание (в смысле возможности познания) объективного и независимого от человеческого сознания существования «вещей в себе» и ограничении познания описанием состояний сознания. Фено-

[1] Том I, стр. 215 и том II, стр. 65.

менологи придают познавательное значение лишь «Beobachtbare Tatsache» (наблюдаемым фактам) и методологически опираются на логическую обработку «системы ощущений», рассматриваемой и имманетно и трансцендентально, но не трансцендентно. Если поэтому рассматривать атом как чистую фикцию и рабочую гипотезу, за которой не стоит никакая независимая от сознания реальность, то такая точка зрения вполне совместима с феноменологией. Исторически феноменологическая физика действительно возникла из физики Максвелла, но на базе трудности проблемы эфира. Неуменье решить последнюю проблему привело к отрицанию объективной реальности эфира и к феноменологической трактовке уравнений Максвелла как орудий математического описания некоторой «системы ощущений». Можно однако привести ряд примеров феноменологической трактовки атомизма [1].

Высокую оценку значения физического исследования для развития математики Клейн дает в главе, посвященной Риману и Вейерштрассу (гл. IV «Die allgemeine Funktionentheorie Komplexer Veränderlicher bei Riemann und Weierstrass»).

Клейн ставит Римана рядом с Гауссом, подчеркивая, что интересы Римана далеко выходили за пределы чистой математики, обнимая математическую физику, общее объяснение природы и психологию [2]. «Моя главная работа,—цитирует Клейн Римана,—заключается в новом понимании известных законов природы, в выражении последних посредством других основных понятий».

Клейн противопоставляет Риману Вейерштрасса. Вейерштрасс—в первую очередь логик—был всегда «пригвожден к формуле», Риман же—«человек блестящей интуиции»—рассматривал формулы лишь как вспомогательное средство: «Die Formen sind mächtig, aber blind».

Неопределенный термин Клейна «интуиция» является не чем иным, как обозначением развитого Риманом метода качественного функционального анализа.

Чтобы дать читателю некоторое понятие о сущности этого метода, мы приведем пример—именно теорию эллиптических функций. Учение об эллиптических функциях возникло из обращения (инверсии) эллиптических интегралов. Обычные усилия исследователей (например Лежандра, Якоби, Вейерштрасса) были направлены к тому, чтобы получить количественные выражения эллиптических функций и их характерных свойств. Этот именно метод главным образом количественного анализа («Rechnerische Metohde») Клейн называет «пригвождением к формуле». Но уже у Гаусса, Абеля и в особенности Римана был намечен иной метод—метод качественного анализа, при помощи которого общие свойства исследуемых функций определяются без знания количественного выражения функций. Риман, пользуясь методом так называемого функционального отображения, изобрел знаменитую риманову многолистную поверхность—наглядное и могучее

[1] См. нашу ст. «Принципы механического миропонимания Л. Больцмана» «Вестник Комм. академии» № 29 1928, где показана тенденция Больцмана сбиваться в некоторых случаях к феноменологической трактовке понятия «материальные частицы».

[2] Том I, стр. 246.

средство качественного математического анализа. На римановых поверхностях функции вырастают, как цветы, и математики занимаются морфологией этих цветов—функций. Мы уже упоминали о том, как Клейн материализовал эту поверхность с целью изучения алгебраических функций.

Характерным выражением различия метода Римана от «Rechnerische Methode» Вейерштрасса является то, что последний строит теорию функций комплексного переменного на понятии ряда, в то время как Риман опирается на физическую теорию потенциала и теорию движения несжимаемой жидкости.

Элементарный и конкретный пример риманова метода изучения читатель найдет на стр. 300 «Введения в теорию функций комплексного переменного» И. И. Привалова. Здесь дана характеристика основных свойств эллиптической функции без приведения количественного выражения функции [1].

Разумеется, как мы это уже подчеркнули выше, истинно плодотворным является сознательный синтез качественных методов. Клейн неизменно проводит этот синтез в своих работах.

Замечательным образцом такого синтеза является исследование Клейна «Vorlesungen über des Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünf ten Grade».

Икосаедр (двадцатигранник—грани треугольные) принадлежит к числу пяти правильных геометрических тел [2]. Пифагорейцы рассматривали эти тела как символы мистического совершенства. Правильные многогранники являются действительно весьма замечательными геометрическими формами и притом в таком отношении, которые трудно даже подозревать. Возьмем к примеру икосаедр. Его можно вращать вокруг различных осей, совмещая с самим собою. Эти вращения образуют прерывную группу, которая может быть количественно выражена при помощи комплексных переменных [3].

Спрашивается, какое имеют отношение эти вращения икосаедра к решению алгебраических уравнений, к теории диференциальных уравнений, к теории функций, к теории чисел? Клейн в своих работах установил это отношение и тем самым дал замечательный образец синтетического мышления в математике.

Для пифагорейцев икосаедр являлся символом мистического совершенства, для нас он может служить символом правильного научного мышления. Вращение икосаедра символизирует единство пространства, времени и движения, т. е. диалектическое единство природы, отображаемое диалектическим мышлением.

Первый том кончается изложением значения прорывных групп преобразований и соответствующих им инвариантных или «ау-

---

[1] См. также гл. VII, где дан пример исследования геометрических свойств кривых при помощи теории абеловых функций, причем результаты получаются «ohne Rechung». См. в особенности сочинение Клейна «Elementarmathematik...».

[2] Клейн изобрел шестое весьма оригинальное правильное геометрическое «тело»—диедр; объем этого правильного «тела» равен нулю. См. стр. 195 русского издания «Вопросы элементарной и высшей математики».

[3] Том I, гл. VIII, стр. 340.

томорфных» функций. Во втором томе Клейн развивает учение о непрерывных группах преобразований в связи с теорией относительности. Классификация различных родов геометрий в зависимости от положенных в основу групп преобразований проникла благодаря теории относительности в механику и математическую физику. Это обстоятельство не является случайным. В своем существенном смысле группы преобразований не что иное, как группы движений-перемещений; неудивительно поэтому, что в механике и физике обнаружилось значение теории непрерывных групп, давно разработаннной другом Клейна математиком Софусом Ли. Как указывает редакция в предисловии, учение Ли в связи с общей теорией относительности и гамильтоновой механикой должно было составить содержание четвертой главы второго тома. Клейну не удалось однако довести до конца обработку этой главы. Опубликованные три главы представляют собою вообще лишь фрагменты из обширного материала по теории относительности, собранного Клейном. В первой главе Клейн излагает общую линейную теорию инвариантов. Вторая глава посвящена специальной теории относительности. Третья глава является уже введением в общую теорию относительности—здесь изложена гауссова геометрия двухмерного пространства, риманова теория n-мерного многообразия, развитие теории инвариантов у Бельтрами, Липшица, Кристофеля и Ли.

Редакторы Курант и Кон-Фоссен (Conh-Vossen) дают высокую оценку второму тому работы Клейна, так как в нем впервые основательным образом изложена связь теории относительности с математикой XIX в. Книга Клейна может действительно служить прекрасным историческим введением в математическую сторону теории относительности.

Заметим в заключение, что история математики в XIX в. Клейна не является полной. В ней нет характеристики развития теории множеств, теории вероятностей, теории интегральных уравнений, вариационных методов, наконец философии математики, математической логики и аксиоматики.

Сам Клейн признает однако, что его работа носит в известной мере фрагментарный и субъективный характер, т. е. что он останавливается главным образом на том, что наиболее соответствует складу его ума и направлению его собственной деятельности.

Это конечно недостаток для историка как такового. Но Клейн едва ли претендует на титул историка. Недостаток исторического объективизма и полноты компенсируется живой документальностью, глубоким проникновением специалиста в сущность предмета, обаянием убежденного в ценности своих идей человека. Книги Клейна является живой книгой, отображающей живую личность крупного ученого и гуманиста.

Насколько нам известно, перевод книг Клейна подготовляется к печати Кабинетом истории естествознания при Коммунистической академии. Книга Клейна в соответствующей марксистской редакции может сослужить большую службу в деле распространения правильных идей о сущности математики и правильной постановки математического образования в СССР,

Э.Кольман

СОВРЕМЕННЫЙ КРИЗИС МАТЕМАТИКИ И ОСНОВНЫЕ ЛИНИИ ЕЕ РЕКОНСТРУКЦИИ [1].

Состояние математики, как и состояние всякой другой науки, в основном определяется развитием и состоянием производительных сил, техники и экономики. Последние влияют на математику как непосредственно—ставя перед нею новые проблемы, доставляя ей материальную базу и формируя ее кадры—так и опосредствованно, через господствующее мировоззрение, через философию господствующего класса.

Поэтому, говоря о современном кризисе математических наук, надо остановиться на кризисе всей буржуазной науки, на кризисе буржуазного естествознания, а в особенности физики. Однако в задачу нашего доклада не входит дать полное освещение этой стороны вопроса: связи кризиса математики с общим кризисом буржуазной науки, а через последний с кризисом капитализма в целом. Достаточно лишь указать, что переживаемый теперь всей буржуазной наукой кризис представляет собой новую, высшую фазу того кризиса, который переживает физика и химия с начала XX века и гениальный анализ которого дал в 1908 г. Ленин в своей работе «Материализм и эмпириокритицизм».

Из всего комплекса относящихся сюда проблем нас интересует сегодня одна частная: это кризис математики сам по себе. Значение этого кризиса громадно. Ведь несомненно, что не только кризис естествознания оказывает влияние на математику, но что и кризис математики в свою очередь влияет на физику, химию, технику. От состояния математики, от ее способности решить ту или другую проблему в значительной степени зависит возможность дальнейшего развития естествознания и техники.

Последнее тем более верно для современной физики с ее исключительным обилием математического аппарата, с ее стремлением геометризации, формализации физики, имеющим целью, как это метко подметил Ленин, дать исчезнуть материи, оставив одни только уравнения. Математизация физики пугает самих физиков—так напр. Хвольсон говорит о математике в физике: «Самое ужасное в том, что эта математика не та математика, которая преподается в высшей школе. Это та математика, о которой ни один физик ничего не слыхал. Самое ужасное то, что ее вес все растет». Борясь против такого рода обску-

---

[1] Доклад на заседании Ленинградского О-ва математиков-марксистов 27 апреля 1931 г..

рантизма, нельзя все же не признать, что физика делается все более зависимой от судеб математики.

И вот чрезвычайно характерно, что эта специальная математика— тензорный анализ, матричное исчисление, теория собственных значений и т. д.— в значительной мере создается самими физиками, так как обыкновенная математика не в состоянии удовлетворить современную физику.

В самом деле, основное, наиболее могущественное орудие математики—анализ—выросло на естествознании, на физике, на механике XVII—XVIII—XIX веков, а значит на принципе непрерывности — «природа не делает скачков». Механика и феноменологическая термодинамика рассматривали все процессы как процессы непрерывные (по меньшей мере в первом приближении) и давали им аналитическое выражение. То же самое имело место и в электромагнетизме и даже в химии.

Однако в эту «гармонию непрерывности» вторгся ряд открытий, начало которым положил Планк своим квантом действия для объяснения теплового излучения черного тела, и далее, через кванты света—фотоны, мы пришли к волновой механике Бройля, Гейзенберга, Шредингера. Физика оказалась несостоятельной дать последовательное аналитическое объяснение этим явлениям, и все попытки дать синтез волн и корпускул, электромагнетизма и гравитации пока что оказались тщетными, в лучшем случае лишь изготовленными ad hoc. Так напр. унитарная теория электричества Дирака, вынужденная вводить понятие отрицательной энергии, является новейшим подтверждением того, что диалектика стихийно проникает в науку, но в руках физиков-идеалистов принимает карикатурные формы. Еще менее состоятельна математика, которая едва в состоянии вырешить уравнения волновой механики даже в простейших, тривиальных случаях.

Эту свою неспособность адэкватно отображать материальную действительность, т. е. мир, существующий независимо от нашего сознания, анализ, впрочем, обнаруживает уже в сравнительно элементарных случаях.

Возьмем например такую задачу, как охлаждение стержня, которая всякому, кто еще не испорчен школьной физикой и математикой, должна казаться крайне простой. Между тем, как известно, решая соответствующее диференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u$$

(где u температура, t время, x абсцисса, b коэфициент, характеризующий лучеиспускательную способность боковой поверхности стержня длины) и принимая во внимание краевые условия, например:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0$$

мы должны будем найти ряд дискретных значений параметра λ, так называемые собственные значения (в данном примере $\lambda_n = n^2\pi^2 + b^2$), при которых возможно существование удовлетворяющих краевым условиям решений вспомогательного уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (\lambda - b^2)\varphi = 0.$$

Таким образом решение диференциального уравнения с частными производными здесь само по себе еще ничего не дает для уяснения физического смысла явления. На выручку приходит прерывный ряд чисел — решение выскакивает из рамок непрерывности.

Такие же обстоятельства встречаем и в задачах, связанных с равновесием пленок (Плато) и во всей группе проблем, где данное состояние зависит от всех предшествующих состояний, т. е. везде, где приходим к интегральным уравнениям, во многих вариационных проблемах и т. д. Очевидно, что этот состоящий из двух взаимно-связанных ветвей путь, которым вынужден искать выхода анализ — сначала к непрерывным решениям, а затем к отыскиванию дискретных значений — может быть только временным, паллиативным. Ясно, что надо искать новых путей.

Действительно, математики ищут эти новые пути, однако не там, где надо. В противовес анализу, который опирается на идею непрерывности, за последнюю четверть века сильно развились те ветви математики, которые на первое место выдвигают идею прерывности как самодовлеющую — теория множеств, теория функций вещественного переменного и, в наиболее законченном виде, теория аналитических множеств.

Итак, мы имеем налицо две крайности: доведенную до абсолюта непрерывность и абсолютизированную прерывность, обе претендующие на самодовлеющее значение, обе не ищущие взаимного единства, обе односторонне отображающие материальную действительность. Поэтому задача состоит не в том, чтобы провозгласить как анализ, так и дискретную математику незаконной, неправомочной, не в том, чтобы с порога отбросить их обоих и начать заново строить на пустом месте, а в том, чтобы, исходя из единого принципа, преодолев то и другое, создать новое исчисление, объединяя положительные стороны как анализа, так и дискретной математики.

Итак, путь внешнего дополнения анализа исчислением прерывности не в состоянии дать синтеза прерывного и непрерывного, не в состоянии вывести математику из современного ее положения, где функции, обладающие прерывностями, трактуются как «неразумные», где прерывность, скачок рассматривается как печальное и нежелательное революционное исключение, или где, наоборот, дискретное возводится в абсолют, рассматривается как совокупность изолированных индивидуумов. Нам необходимы не два анализа, а один, который отобразил бы в своих операциях единство прерывности и непрерывности. Но чтобы создать его, надо, чтобы математика стала диалектичной, чтобы математики не сторонились диалектического материализма, как чорт ладана.

Эти попытки залечить кризисное состояние современной математики, неспособной в руках математиков-метафизиков дать синтез прерывности и непрерывности, могут быть охарактеризованы еще, как попытки арифметизации анализа. Это попытки с негодными средствами. Клич «назад к арифметике», брошенный Кронекером, является столь

же реакционным, как и модный призыв повернуть химию к алхимии, медицину к Гиппократу. Надо не арифметизировать анализ, а внести в него новое качество, создать на высшей основе синтез арифметики, алгебры и анализа, уничтожить разрыв между прерывностью и непрерывностью.

Однако наряду с этим разрывом нельзя не отметить другой разрыв в математике, а именно разрыв между математикой в целом и теорией вероятностей, разрыв, значение которого в связи с ролью статистики в современной физике, биологии и т. д. особенно велико. Теория вероятностей пользуется конечно всеми частями математики: арифметикой, алгеброй и анализом, но не в этом состоит глубокая связь между нею и всей математикой.

Из теории геометрической вероятности известно, что опытным путем, бросанием иглы на квадратно-разграфленную доску и подсчетом количества пересечений с линиями, можно определить значение числа П, как это еще в 1777 г. показал Бюффон[1], и что подтверждено действительными опытами напр. Вольфа в Цюрихе; получившим из 5 000 бросаний $\Pi \cong 3{,}1596$. К этому роду связей, позволяющих из большого количества опытов определить со сколь угодно малой погрешностью точные математические величины, приводят такие известные задачи с урной, как определение вероятности того, что при вынимании четного числа шаров из урны, содержащей n шаров пополам черных и белых, половина окажется черными, половина белыми, что дает $p = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}$, или же определение вероятности того, что при вынимании занумерованных шаров из урны ни один раз номер порядка появления не совпадет с номером шара, что в пределе дает

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1} = 0{,}36787 \ldots$$

Еще более неожиданным может показаться то обстоятельство, что теория вероятностей позволяет находить зависимости, иногда весьма сложные, относящиеся к алгебре или к арифметике. Так известная проблема Муавра[2] определения вероятности того, что при вынимании занумерованных шаров из урны сумма номеров будет равна данному числу, приводит нас к зависимости $n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$. Или совершенно элементарный, но методологически весьма важный пример: это суммирование геометрического ряда путем вероятностной схемы, пример, который напомнил Люстерник: в урне с белыми шарами (вероятность появления шара p) и черными (вероятность $q = 1 - p$) извлекаются шары; вероятность извлечения белого при n-ом извлечении равна pq^n и так как наконец все шары появятся, то при $\lim n = \infty$

$$p + pq + pq^2 + \ldots = 1, \text{ откуда } 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

[1] Essai d'Arithemétique morale.

[2] Moivre «De mensura sortis seu de probabilitate eventuum in ludis a casu tortuito pendetibus» 1711

Этот простой пример ставит перед нами проблему построения таких вероятностных схем, которые позволили бы суммировать и другие сходящиеся ряды, более сложные, чем геометрический. Наконец укажем еще на то, что вероятностные вычисления позволяют нам определить с любой точностью иррациональность, например $\sqrt{2}$, на что в этой связи обратил внимание Хотимский. На самом деле, если принять приближение с точностью до 0,5, то получаем:

$$\sqrt{2} \cong 1,\ 2\sqrt{2} = \sqrt{8} \cong 3,\ 3\sqrt{2} = \sqrt{18} \cong 4,\ 4\sqrt{2} = \sqrt{32} \cong 6,$$
$$5\sqrt{2} = \sqrt{50} \cong 7,$$

откуда на основании теории погрешностей:

$$\sqrt{2} \cong \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7}{1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{78}{55} = 1{,}418.$$

Аналогично можно поставить более общую задачу, а именно нахождение корней уравнения вероятным путем.

Спрашивается, как возможны эти результаты, как это возможно, что основывающееся на случайности вычисление дает точные закономерности, сколь угодно точные результаты. На этот вопрос современная математика не отвечает, эти связи она не изучает, а рассматривает их больше как известного рода курьезы. И она не может дать объяснения этим связям потому, что ее метафизическое мышление не в состоянии понять единства статистической и динамической закономерности, а рассматривает их как раздельные, антагонистичные.

Это обстоятельство имеет конечно не только философское значение. Оно приводит к тому, что современная статистическая теория остановилась на одних лишь стационарных состояниях, что закон больших чисел не развит в сторону вариирующих процессов. Все это в свою очередь связано с тем, что вся математика выросла в основном на науках естественных и нисколько не приспособлена к обслуживанию научной политэкономии. Разумеется, что все попытки установить чисто формальное соответствие между элементами теории вероятностей и элементами анализа, аксиоматизировать теорию вероятностей оказываются бесплодными упражнениями.

Третий, пожалуй, еще более общий и глубокий изъян в современной математике состоит в крайней бескачественности громадного большинства ее методов. Бескачественность в математике мы понимаем конечно не в том смысле, что математические понятия представляют собой лишь повторения немногих основных понятий, их количественные усложнения. Оставаясь в основном наукой о количестве, математика внутри количества создает свои специфические математические качественности и более того, в целом развивается от количества к мере, от абстрактного к конкретному, наполняется новым содержанием, полученным ею благодаря влияниям физики, естествознания вообще.

Однако это развитие сугубо противоречиво: в отдельных ответвлениях математики оно идет от конкретного ко все большей и большей абстракции, ко все большему выхолащиванию качественных моментов. Прекрасным примером могут служить неевклидовы геометрии. В то время как их возникновение на деле отражает более глубокое познание

действительности, в буржуазной математике не только факт их существования привлекается в качестве главного свидетеля правоты идеализма, но и математическая разработка их идеалистически искажается.

Таким образом то, что собственно говоря составляет познавательную силу математики, ее громадная способность абстракции, превращается на определенных ступенях ее развития в свою противоположность, делает математику данной формации бессильной справиться с усложнившимися задачами, возникающими в связи с дальнейшим проникновением наших физических знаний в самые недра материи. И хотя мы и не в состоянии изменить природу предмета математики, так как, наоборот, этот предмет определяет ее содержание, мы все же должны развивать математику в сторону дальнейшего уточнения качественных различий в области самого количества.

Математика отображает действительные зависимости посредством зависимостей функциональных; значит, даже самую простую зависимость, причинную, она отображает в крайне искаженном, несоответственном виде, и тем более не дает отображения таких зависимостей, как взаимодействие, как единство взаимнопроникающихся противоположностей. Математические уравнения лишены направленности, между тем как уравнения, не лишающие действительность ее качественных особенностей, будь это уравнения формы стоимости в политэкономии, будь это уравнения химические, существенно обладают направлением. Маркс в «Капитале» (т. I, гл. 1) указывает на полярность уравнений простой стоимости, когда выражение 20 аршин холста=1 сюртуку не может быть просто перевернуто в 1 сюртук= =20 аршин холста. Необратимость химических уравнений, в одном направлении являющихся экзотермическими, в другом эндотермическими, общеизвестна. Спрашивается, почему бы математические символы и операции над ними не могли ближе подойти к некоторым из тех качественных особенностей действительности, от которых математика отвлекается. Такая постановка вопроса не имеет однако ничего общего с попытками математизации всех и всяких закономерностей вообще, с попытками создания панматематической картины мира, с попытками, уходящими в пифагореизм, в каббалистику. Объект математики не безграничен в том же смысле, как и не безграничен объект физики, химии, биологии или политэкономии. Так же как закономерности политэкономии не могут быть выявлены биологией или физикой, или также как физика и химия не в состоянии вскрыть закономерности биологические, также и математика не может и никогда не сможет подменить собою физику, химию и т. д. Однако, сохраняя свою специфичность и не претендуя на роль панацеи, математика может все же и должна на определенной ступени развития на высшей основе вернуться к своей исходной точке — к большей конкретности, к большей качественности.

Попытки подобного рода были уже с успехом сделаны. Так например в векторном анализе, возникновение и развитие которого тесно связано с историей механики и электродинамики, фигурируют не только величины, но и направления. Почему бы не пойти далее в этом направлении и не попытаться создать новое качественное исчис-

ление, хотя бы для потребностей одной какой-нибудь определенной ветви физики. Почему бы не попытаться осуществить таким образом то зерно истины, которое содержит идеалистическое заблуждение Лейбница о создании исчисления, которое было бы в состоянии «представить фигуры и даже машины и движения буквами, как алгебра представляет числа и величины».[1] Но для осуществления такого поворота в математике необходимо, чтобы математики уяснили себе действительную связь между конкретным и абстрактным, чтобы они отказались от фетишизации математики, от идеалистического и недиалектического понимания отношения математики к действительности.

Четвертый основной разрыв в современной математике,—это разрыв между историческим и логическим. Конечно математика ставит проблемы, оперирует понятиями, методами, которые исторически необходимы, которые обусловлены всем развитием как техники, естествознания, философии, так и самой математики. Но в самой математике как в научной системе, эта историческая необходимость не находит отражения. Взять к примеру эволюцию такого основного понятия, как понятие о числе. Современная математика развивает его или исходя из «принципа перманентности» Ганкеля или из аксиоматического принципа Гильберта. Однако «принцип перманентности» на деле не осуществляется, развитие числа нарушает его. Что же касается Гильбертовской аксиоматики, то она приносит пользу для уяснения логических связей между отдельными математическими понятиями и положениями, но и она, являясь конструкцией постфактум, ни в малейшей степени не отображает действительной эволюции. Поэтому оба принципа по существу лишь затемняют действительный характер развития, имевший место.

Далее, для примера укажем на такое элементарное и вместе с тем и фундаментальное выражение как предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

Общеизвестно, что это выражение не искусственно надумано, что оно возникло из исторических потребностей мореплавания, из потребностей создания наиболее пригодных для вычисления логарифмов. Значит, на вопрос, почему изучается этот предел e, а не другой, отвечает не математика, а ее история. Между тем можно ведь спросить, каковы логические основания для того, чтобы изучали именно этот предел. К этому вопросу можно подойти в такой форме: потребовать сконструировать аналогичное предельное выражение или целый ряд таких выражений так, чтобы названное число e оказалось одним из членов этого ряда. Конечно задача построения таких выражений по аналогии не однозначна, но такой ряд, будь он построен, дал бы возможность более глубоко понять само число e. К этому же с особой стороны подошел и Гильберт, когда он в двенадцатой проблеме своей парижской программы поставил задачу найти такие функции, кото-

[1] Письмо Лейбница Гюйгенсу, 1679 г.

рые бы для любого алгебраического тела играли роль соответствующую той, которую играет показательная функция для тела рациональных чисел.

Так как в самой системе современной математики нет логического обоснования того, почему она трактует о данном предмете, то любому, кто не знает истории математики, кажется, что всякое новое понятие, всякая новая проблема в математике появляются спорадически, внезапно, и постановка проблем, подобных вышепоставленной, неизбежно огорошивает математиков, так как в современной математике нет подъездных путей к этим проблемам. Это обстоятельство укрепляет положение идеализма, поповщины, создавая видимость, будто все дело в свободном творчестве имманентного разума, в наитии и т. д., и вместе с тем оно свидетельствует о неспособности современной математики к обобщениям такого размаха, которые сразу продвинули бы ее значительно вперед, охватывая целые ее части, устраняя существующий в ней параллелизм, очищая ее от излишних геологических наслоений, и т. д. и т. п. Из всего этого видно, что необходимо уничтожить разрыв между историческим и логическим в математике, надо с точки зрения единства исторического и логического подвергнуть ревизии основные математические понятия, ее структуру, ее методы, ее проблематику.

Пятый важнейший разрыв в современной математике—это разрыв между теорией и практикой внутри самой математики. В то время как математическая теория чрезвычайно разветвлена и развивается необычайно быстро и пышно, математическая практика, т. е. сами вычислительные методы еле-еле ползут вперед, а то и вовсе остановились на уровне XVII—XVIII веков. Действительно, ведь почти всякая математическая проблема, поскольку она имеет значение для практики, должна в конце концов привести к какому-то вычислительному процессу, решение, указываемое математической теорией, должно быть эффективным. Между тем большая часть математики, в особенности новейшей, не дает никаких эффективных результатов и вовсе не заботится о них, а вращается лишь вокруг логических «доказательств существования».

Сами вычислительные методы, которыми пользуемся, сводятся в сущности к тем алгоритмам, которыми пользовался еще Ньютон. Целый ряд в теории мощных инструментов математики практически оказывается непригодным, так как не разработаны способы их использования; сюда относятся все развертывающиеся процессы, как-то: сходящиеся ряды, произведения, дроби, итерации, рекуррентные процессы, медленная сходимость которых в большинстве случаев делает их бесполезными. Так как в современной математике, как и в буржуазной науке в целом, «чистая» математика оторвана от «прикладной», то вопрос о создании таких вычислительных методов, приборов, таблиц, которые позволили бы напр. суммировать с заданной точностью, целые категории сходящихся рядов определенного типа и т. п., не ставится, и во всяком случае «чистые» математики считают, что он не имеет никакого отношения к их неземной науке. Между тем создание таких приборов дало бы нам новый алгоритм, что позволило бы нам браться за несравненно более сложные проблемы, чем мы можем сей-

час, когда мы вынуждены считать проблему вырешенной лишь тогда, когда она приводит к основным арифметическим действиям. Это по-новому поставило бы проблему сходимости. Но для того чтобы преодолеть этот разрыв между богато разросшейся математической теорией и сравнительно ничтожной эффективностью, необходимо действительно научное понимание единства между теорией и практикой, понимание примата практики над теорией, то понимание, которого у современных буржуазных математиков нет и быть не может.

Шестой разрыв в современной математике—это разрыв в ее так называемых обоснованиях или, выражаясь точнее, в той философской надстройке, которая должна оправдать это здание, включив его во всю систему мировоззрения. Оба взаимно конкурирующие обоснования современной буржуазной математики—логистика и интуиционизм—суть обоснования идеалистические. Безразлично, считают ли при этом, как это делают логисты, мир математических понятий миром застывших, неподвижных универсалий, или же наоборот, как это видим у интуиционистов, считают его средой свободного становления. Безразлично, считают ли с Рессселем, что математические понятия априорны, что они сводятся к натуральному ряду, заранее заданному в готовом виде во всей своей бесконечной совокупности, или же полагают вместе с Вейлом, что математические понятия рождаются интуитивно не из чувственного опыта и разума, а таинственным, оторванным от бытия образом. Все равно и то и другое «обоснование» не в силах справиться ни с парадоксами теории множеств, ни с законом исключенного третьего. Какие бы ухищрения финитизма, металогики, математической атомистики ни придумывались, желание буржуазных математиков отделиться от материи и от диалектики дымовой завесой формальной логики приводит их неизбежно в пустыню схоластики.

Все глубочайшие противоречия в математике, противоречия между единичным и множественным, между прерывностью и непрерывностью, между случайным и необходимым, между абстрактным и конкретным, между историческим и логическим, между теорией и практикой, между самой математикой и ее обоснованием, на деле суть противоречия диалектические. Их внутреннее проникновение и должно составлять развитие самой математики. Однако благодаря стихийности всего этого процесса, благодаря тому, что в буржуазной математике, как и во всей буржуазной науке (и в капиталистическом укладе в целом), царит анархия производства, нет и не может быть общей плановости,—этот процесс развития математики не обходится без тяжелых кризисов, без периодов застоя и упадка. Парализующим образом действует и влияние идеалистической метафизической классовой философии и то крайнее разделение труда, которое, будучи характерным для всего капиталистического общества, ярчайше выражено и в самой математике, где редко можно найти ученого, способного понимать труды не по его личной узкой специальности. Итак, выход математики только один: это сознательная перестройка ее на основе материалистической диалектики.

Однако можно ли вообще говорить о сознательной перестройке математики и вообще науки, можно ли всерьез ставить вопрос о внесении

плановости в науку, в математику? История отвечает на этот вопрос утвердительно. Положительным примером может служить эрлангерская программа Клейна, предложенная им в 1872 г., программа, сверкнувшая действительно настоящий переворот в геометрии. Эта программа, давшая столь плодотворные результаты, замечательна тем, что в ее основе лежит целостная, объединяющая ее идея—идея группы пространственных преобразований и отыскания характерных для нее инвариантов. Выставленная Гильбертом в 1900 г. программа значительно менее удачна, чем эрлангерская программа. Она не спаяна общей идеей, а является лишь перечнем отдельных хотя и удачно схваченных проблем из всех областей математики, а поэтому она не произвела в математике переворота подобно программе Клейна, хотя и она, несмотря на свой мозаичный характер, сыграла положительную роль, привлекла внимание молодых математиков к кажущимся неразрешимыми проблемам, как напр. Гельфонда, Шнирельмана и др.

Успешность эрлангерской программы объясняется пожалуй еще и тем, что она не математическая, а геометрическая программа.

Геометрия как наука более вещная, чем математика, не только сама менее отрывается от действительности, но и выручала математику не один раз, геометрические методы, геометрическая проблематика оказывали на математику облагораживающее действие, возвращая ее к «грешной земле».

Это однако не значит, что геометрия играла когда-либо иную роль, чем вспомогательную, что она могла когда-либо подменить собою ту роль всеобщей абстрактной формы, которую в математике играла и играет алгебра, что она могла добавить сюда больше, нем то, что дает интуитивная наглядность.

С этой точки зрения следует присмотреться и к наиболее молодой ветви геометрии—топологии, изучающей те чрезвычайно общие свойства пространственных образований, которые остаются неизменными при любых непрерывных одно-однозначных преобразованиях. Из топологии, в которой уже достигнут некоторый синтез непрерывности и прерывности (теоретико-групповая и теоретико-множественная топология), где школой Александрова, Понтряина делаются поиски обоснования самого факта постановки топологических проблем, вышел ряд методов, которые позволяют решать математические задачи, требующие синтетического подхода—это топологические методы Люстерника и Шнирельмана в применении к вариационному исчислению и т. д. Можно надеяться, что изучение топологических методов косвенно поможет математике продвинуться в плановом порядке дальше по этому пути.

Однако как все-таки, исходя из задачи решения перечисленного ряда проблем, приступить к составлению плана реконструкции математики? Самое простое было бы конечно, если бы кто-либо взял и предложил такой план в готовом виде. Но это же было бы плану смертным приговором. Ведь такой план в настоящее время, при том громадном разветвлении математики, которое мы имеем, можно создать лишь на основании большой коллективной работы. Такой план, который может быть создан конечно лишь в стране с плановым хозяйством и с

планируемой наукой, не может возникнуть иначе, чем на основании всего опыта научно-исследовательских институтов, заводских лабораторий, на основании потребностей промышленности, сельского хозяйства и транспорта всей страны. Но этот план не может быть просто собранием разнообразнейших тем, которые мы получим, собирая на математические конференции инженеров и научных работников, а должен получиться в результате глубокой проработки этого материала. Общий цемент плана должна нам дать материалистическая диалектика.

Отсюда следует, что мы не сможем обойтись без глубокого изучения всего того, что в работах Маркса, Энгельса и Ленина имеет отношение к математике и ее истории. Значит, нам надо еще раз и еще раз изучить все сказанное Энгельсом в «Анти-Дюринге» и в «Диалектике природы», все сказанное Лениным в «Эмпириокритицизме» и в его «философских тетрадках» и в ряде других, особенно экономических работ. У Маркса имеется ряд неопубликованных математических работ, из которых часть представляет собою простые упражнения, часть—это выписки из разных авторов, которых Маркс изучал, с его собственными примечаниями, а часть—эти наброски оригинальных исследований. Работы Маркса относятся к арифметике (в том числе к коммерческой, к комбинаторике и к методу конечных разностей), к геометрии (конические сечения, тригонометрия, аналитическая геометрия), к алгебре (теория уравнений, метод неопределенных коэфициентов, ряды) и к анализу. В особенности Маркс интересовался основными понятиями дифференциального исчисления и громадное внимание уделил ряду Тэйлора (ему посвящено 8 работ). Всех имеющихся в распоряжении Института Маркса и Энгельса математических работ Маркса пятьдесят.

Сюда не включены имеющие громадное теоретическое значение работы Маркса по применению математического метода, как подсобного метода исследования к политэкономии. Эти работы связаны как с подготовкой Марксом «Капитала» и нашли частичное применение в нем, так и с дальнейшей разработкой Марксом закономерностей капиталистического развития, в особенности проблемы кризисов. Не входят сюда также заметки Маркса по истории математики, которой Маркс как и техникой и естествознанием и их историей занимался, возвращаясь снова и снова к их изучению. Издание математических работ Маркса, которое последует в ближайшее время, без сомнения целиком оправдает сказанные Энгельсом в надгробной речи слова о том, что Маркс в любой области, над которой он работал, даже в математике, сделал самостоятельные открытия. Несмотря на то, что Маркс в основном был знаком лишь с Ньютоном, Тэйлором, Эйлером, Д'Аламбером, Лагранжем, Маклореном, Лакруа, труды которых он изучал, методологическое значение его работ громадно и не потеряло своей злободневности.

На основании марксистско-ленинской теории, философии диалектического материализма, должна быть изучена история математических наук, подробно разработан вопрос о тенденции их развития. В первую очередь нам нужно изучить развитие математики в эпоху

империализма и пролетарских революций, продолжить на диалектико-материалистической основе работу Клейна, этого наиболее передового из буржуазных математиков, в работах которого наряду с махизмом имеются значительные элементы стихийного материализма. Эта работа по созданию такого сборника уже начата. Нам нужно сосредоточить свое внимание на эволюции основных математических понятий, в первую очередь на таких важных понятиях, как производная, дифференциал, предел. Нам нужно создать действительно научную квалификацию математических наук. Нам нужно выявить значение алгебры, как связывающего звена между арифметикой и анализом. Нужно изучить такие «заброшенные» ответвления математики, как напр. уравнения в конечных разностях и их связь с анализом или расходящиеся ряды, изучить причины того, почему математика временно отвернулась от них, поставить вопрос о месте теории чисел в математике и о путях ее развития, о развитии всей структуры математики.

Одновременно со всеми этими общетеоретическими проблемами должен быть поставлен и вырешен ряд проблем, непосредственно связанных с социалистическим строительством, должна быть создана деловая рабочая программа советской математики.

Прежде всего необходимо организовать всесоюзный вычислительный институт, который, разрабатывая вычислительные методы, решая отдельные математические проблемы, возникающие в нашей социалистической промышленности, транспорте, коллективизированном и индустриализированном земледелии, был бы оперативным штабом всей математической работы, проводимой отдельными научно-исследовательскими институтами в стране.

Одна из центральных групп задач, которыми должна заняться наша математика, это—вопросы статистические, играющие решающую роль в плановом социалистическом хозяйстве, вопросы проектирования, размещения экономических центров, на особое значение которых указывал Ленин, вопросы рационализации перевозок и т. д. Другая важнейшая группазадач—это участие в стандартизации, в выработке оптимальных форм и серий продуктов, участие в рационализации, напр. в конвейерных задачах и т. п. Третья группа задач состоит в разработке усовершенствованных, соответствующих темпам социалистического строительства топографических и картографических методов, задача, имеющая столь громадное значение в такой стране как СССР, чья территория, полная несметных природных богатств, оставалась благодаря хищническому хозяйству царского и капиталистического режима неизведанной. Наряду с этими общими проблемами стоит ряд частных, связанных с задачами развертывающегося у нас дирижаблестроения, со статистикой земных недр и т. д. и. т. п.

Только плановое социалистическое хозяйство ставит перед математикой все эти новые задачи, требующие комплексного участия различных ветвей математики (например теория вероятностей и диференциальная геометрия, или теория вероятностей и вариационное исчисление, или вариационное исчисление и теория чисел), требующие массового математического производства и эффективности в соединении с самой широкой теоретической научно-исследовательской работой.

Особо стоят важнейшие задачи реорганизации преподавания математики на всех ступенях обучения, начиная с начальной единой трудовой политехнической школы и кончая высшей школой.

Для решения всех этих теоретических и практических проблем, для преодоления кризиса современной математики, для социалистической ее реконструкции необходима упорная и длительная работа, необходим коллективный труд всех советских математиков, а также тех работников науки капиталистических стран, которые пожелают итти с нами. На базе ленинского учения о единстве теории и практики мы добьемся нужной перестройки математических наук. На базе ленинского принципа партийности науки мы поставим математику на службу социалистическому строительству и тем самым спасем ее от загнивания, неизбежного при капитализме.

Пролетариат, класс, создающий все земные блага, единственный подлинно-прогрессивный революционный класс, не только освободит себя и всех эксплоатируемых от наемного рабства, не только уничтожит все виды угнетения, но по примеру рабочих и трудящихся Советского союза, руководствуясь марксистско-ленинской теорией, победит политически и экономически и добьется реконструкции всех наук, в том числе и столь отвлеченных, как науки математические.

М. Орлов

ПРОТИВ ИДЕАЛИЗМА В МАТЕМАТИКЕ [1]

Чрезвычайная абстрактность понятий, которыми оперирует математика, является одной из причин преобладания в этой науке идеалистических воззрений. Математика выступает в качестве творения свободного человеческого разума, независимого от реальной действительности. И более того: очень часто встречается мнение, будто не математические законы являются продуктом объективной действительности, но что, наоборот, эти законы упорядочивают природу и управляют ею. Иногда для подкрепления подобной позиции на помощь призывается еще высшая сила. Недаром например Кронекер, известный немецкий математик конца XIX столетия, говорил, что вся математика кроме натуральных чисел, сотворенных богом, представляет собой создание человеческого разума. В более замаскированной форме, но по существу дела совершенно так же, подходят к этому вопросу и современные приверженцы кронекеровских идей, так называемые интуиционисты.

В общественных науках диалектический материализм одержал бесспорную победу над всеми идеалистическими теориями. Значительно менее разработана диалектика природы и естественных наук. Однако за последнее время диалектический материализм добился немалых успехов и на этом фронте. Он постепенно проникает и в биологические науки, и в физику, и в химию. Но математика и по сию пору находится за пределами его воздействия. В самом деле кроме нескольких посвященных отдельным проблемам статей в журналах «Под знаменем марксизма» и «Вестник Коммунистической академии» не существует еще систематически организованного наступления на идеализм в области математики. До сих пор еще не разработаны математические высказывания Маркса, Энгельса и Ленина. Математические рукописи Маркса даже еще не расшифрованы.

Между тем этот вопрос о математическом идеализме актуален не только с чисто философской точки зрения, но и с точки зрения конкретных задач социалистической перестройки Советского Союза. На примере математики снова находит подтверждение основной марксистский тезис о существовании неразрывной связи между теорией и практикой. Мы именно увидим, что идеалистические математические теории приводят к реакционным практическим результатам.

---

[1]) Перевод с украинского. Оригинал статьи помещен в сборнике, вышедшем летом 1930... (к XVI му с'езду партии).

Рассмотрим например взгляды так называемого математического формализма, чрезвычайно распространенного среди математиков всего мира. Существует даже особая группа учеников известного ученого Давида Гильберта, специально занятая разработкой математики в духе формализма. Основой математического формализма является аксиоматический метод.

Этот аксиоматический метод ставит своей целью полностью собрать все основные понятия и положения, из которых можно вывести дедуктивным путем все прочие понятия и законы данной науки. Из основных положений-аксиом таким образом выводится вся данная наука. Примером применения аксиоматического метода может служить геометрия Евклида. В основание ее положены некоторые аксиомы, из которых затем и выводятся все положения геометрии.

Однако как раз по поводу этого-то примера необходимо указать на следующее обстоятельство принципиального значения. Аксиомы Евклида взяты из природы; это—некоторые абстракции происходящих в объективном мире явлений. Аксиомы математического формализма носят совершенно иной характер. Их задача состоит как раз в том, чтобы максимально замаскировать происхождение математики из потребностей практики, и человеческого опыта. Логическое с этой целью начисто отрывается от чувственного и исторического. Чувственное наглядно рассматривается лишь как источник разнообразных ошибок. Вот почему геометрия Гильберта и не рассматривает точку, прямую и плоскость как нечто, известное нам из опыта, из нашей практической деятельности. Нет, точки, прямые и плоскости в геометрии Гильберта представляют собой только предметы, удовлетворяющие некоторой системе аксиом,—и ничего более. Таким образом критерий практики, критерий человеческого опыта отбрасывается. При этом естественным образом возникает вопрос: каким путем можно установить истинность той или иной системы аксиом? Гильберт на это дает следующий ответ: система аксиом истинна в том случае, если она система независимая, полная и главное—непротиворечивая.

Независимость системы аксиом определяется тем условием, что замена какой-либо аксиомы ей противоположной не приводит к противоречиям. Иначе говоря, каждая аксиома совершенно не зависит от всех остальных аксиом, не является их следствием. Замена любой аксиомы аксиомой ей противоположной не нарушает истинности (згідности) системы. И здесь примером может служить геометрия, именно аксиома о параллельных прямых. Как известно, эта аксиома утверждает, что через данную точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной прямой. В своей время было потрачено немало усилий на «доказательство» этой аксиомы. Но после возникновения неевклидовой геометрии (Лобачевского, Римана, Больяи), в которой аксиома Евклида заменена другими положениями, совершенно отчетливо была установлена независимость аксиомы о параллельных прямых от всех остальных аксиом, ибо неевклидова геометрия не приводит ни к каким противоречиям.

Следующее условие справедливости (справжности) системы аксиом—это полнота системы. Она требует, чтобы, исходя из данной системы аксиом, на любой вопрос соответствующей отрасли науки можно было (пользуясь логической дедукцией) дать либо отрицательный, либо утвердительный ответ. Таким образом полнота системы гарантирует, так сказать, «разрешимость» всякой обладающей определенным смыслом проблемы. Неразрешимых задач не существует. «В математике,—как сказал на последнем математическом конгрессе в Болонье Гильберт,—не может существовать проблем, которых мы никогда не сумели бы познать и разрешить» [1].

Наконец всякая система аксиом безусловно должна быть непротиворечивой,—т. е. необходимо иметь уверенность в том, что, исходя из системы аксиом, невозможно путем логических умозаключений притти как выводу «*A*», так и выводу «не-*A*». Это условие непротиворечивости аксиом играет важнейшую роль в теории математического формализма. И действительно, если отказаться от критерия проверки на практике, то какой иной критерий кроме условия непротиворечивости можно было бы считать удовлетворительным? Проблема непротиворечивости тесно связана с вопросом о независимости, потому что, если какое-либо положение не зависит от известных аксиом, то противоположное положение не противоречит этим аксиомам.

Если система аксиом удовлетворяет упомянутым трем условиям—непротиворечивости, независимости и полноты, то все выводы из такой системы справедливы. Таким образом, по выражению несогласного с формалистами, известного математика Вейля, оказывается, что «чистая математика представляет собой гипотетико-дедуктивную теорию отношений, теорию логических форм, не связанных с той или иной возможной содержательной интерпретацией». Подобную математику очень часто и очень удачно сравнивают с шахматной игрой. Расположение фигур на доске и правила игры зависят только от предварительного соглашения. Эти расположение и правила должны лишь не приводить к противоречиям, например к тому, чтобы на доске не оказалось десяти королев одного цвета. Правильность расположения и правил определяется только требованием непротиворечивости. Как известно, в шахматной игре отпадает самый вопрос об объективной истинности того или иного положения.

Вот как представляют себе математику формалисты. Ясно, что формализм—это насквозь идеалистическая теория, принимающая за отправной пункт своих рассуждений не объективную действительность, а «творческий дух», который якобы в состоянии создать математику строго формальным путем, на основании определенных правил логики.

[1] В последнем, конечно лишь в отношении проблем, имеющих конкретный смысл, уверены и материалисты-диалектики. Но в то время как гильбертова «политика» имеет целью отрыв логического от исторического путем создания такой системы аксиом, которая сразу, не развиваясь, разрешала бы все проблемы данной области, диалектический материализм делает ударение именно на изменении, развитии этой системы (и входящих в нее понятий), на его обусловленности потребностями естествознания и техники, требующих все более и более точного и правильного отражении действительности в понятиях математики.

Вся предшествующая история развития математики и вся современная математика в целом самым ярким образом противоречат концепции формализма. В чем действительная суть условий аксиоматики? Эти условия выражают собой законченность науки, возможность завершенности всей науки. Иначе ведь никак невозможно установить непротиворечивость системы аксиом, ибо никогда ведь не удастся перебрать все возможные логические выводы и положения. Возможность этого означала бы конец дальнейшего развития науки. В тот момент, когда формалистам удалось бы доказать полную непротиворечивость системы аксиом, они остановились бы перед каким-либо новым, более сложным противоречием.

Замена оценки истинности математических законов при помощи критерия практики условием непротиворечивости ликвидирует математику как науку, связанную с изучением природы. По мнению Гильберта и его школы, формализация математики придает ей абсолютную достоверность. В действительности же эта формализация, при последовательном ее проведении, делает невозможным применение математики в области физики, техники и общественных наук, ибо всякую систему аксиом со всеми выводами из нее приходится, в случае ее непротиворечивости, считать истинной.

Итак мы имеем перед собой чрезвычайно отчетливо выраженную идеалистическую теорию математики, из которой, разумеется для приверженцев этой теории вытекают (быть может без ведома некоторых из них) вполне определенные практические последствия. Именно придерживаясь подобных воззрений на математику, приходится признать полную равноправность за всеми математическими идеями и теориями, независимо от их практической полезности. Действительно: например в современных немецких специально математических журналах немалое количество статей представляет собой результат философско-математических спекуляций. Вместе с тем чрезвычайно важные математические проблемы и методы, имеющие прикладное значение, по большей части разрабатываются для их непосредственных нужд самими физиками и техниками. Неудивительно, что современная формалистическая математика, покоящаяся на ошибочном общеметодологическом фундаменте, большей частью направляет свои усилия на «доказательства существования» решения той или иной задачи, не занимаясь поисками самого решения и даже не ставя о нем вопроса.

Очевидно, что борьба с математическим формализмом имеет для марксистов и общефилософское и чисто практическое значение.

Наряду с формализмом существует еще и другая концепция «философии математики», также насквозь идеалистическая, несмотря на свою «решительную» борьбу с формализмом. Это—так называемый интуиционизм.

Основное положение интуиционизма требует решительного различения в математике конструкций от голых доказательств существования, причем только первым придается научное значение, тогда как последние отбрасываются. В современной математике очень часто не удается построить какой-либо математический объект, и только доказывается тем или иным способом (например от противного) его существо-

вание. Подобные доказательства интуиционизм считает недостаточными: они по мнению интуиционистов лишены всякого смысла.

Но что такое конструкция? Этого интуиционизм надлежащим образом не поясняет. Очевидно никакая идеалистическая теория и не в состоянии сделать этого, поскольку исходным пунктом ее является «дух», а не природа.

Интуиционисты также отрицают безусловную справедливость закона исключенного третьего. Они приводят много примеров, в которых по их мнению этот закон недействителен. Рассмотрим один из них.

В ряду натуральных чисел встречаются пары следующих одно за другим нечетных простых чисел—например 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43 и т. д. Как ответить на следующий вопрос: встречаются ли подобные пары чисел без конца, или же существует граница, за пределами которой они уже более не попадаются? Очевидно, что установить положение вещей при помощи конструкции невозможно. Ответ на этот вопрос является неопределенным. Правда, по мнению формалистов рано или поздно окажется возможным дать либо утвердительный, либо отрицательный ответ, но интуиционисты возражают на это, что в данном случае закон исключенного третьего неприменим и что кроме двух указанных ответов возможен еще третий, гласящий, что поставленная проблема принципиально неразрешима. С точки зрения интуиционизма доказательство от противного не имеет никакого смысла, ибо понятие произвольной числовой последовательности не является для интуиционистов замкнутым и готовым, а дано так сказать только в становлении.

Отрицая абсолютность законов формальной логики, интуиционисты не переходят к высшей диалектической форме логики и, оставаясь по сути дела на прежних и только суженных позициях формальной логики, скатываются к агностицизму. И нельзя не согласиться с формалистами, когда они обвиняют своих противников в философском агностицизме.

Единственное, что задано людям изначала в их первоинтуиции—это, по мнению интуиционистов, представление о натуральных числах и законы их порождения. Они, с точки зрения интуиционизма, не требуют никакого обоснования, никакого подтверждения на опыте. Все остальное в математике выводится при помощи известных способов дедукции и принципа полной индукции, на основе, разумеется, упомянутых выше принципов конструируемости и ограниченных законов формальной логики.

Давая беглую общую оценку интуиционизма, прежде всего необходимо признать за ним немало справедливых с марксистской точки зрения положений практического характера. Пока интуиционисты критикуют формалистов, вскрывая беспредметность и схоластичность формализма, они правы. Тем более ярко проявляется несостоятельность интуиционизма в положительной части теории. Он не в состоянии предложить ничего лучшего, как сократить область математики, отбросив все требующие своего объяснения и решения противоречивые проблемы. Вместо создания диалектико-материалистической методологической базы математики они искусственно ограничивают

круг математических проблем, сохраняя из них только непротиворечивые. Им например приходится отказаться от всей той части теории множеств, которая лежит за пределами счетно-бесконечных множеств. Исключается также значительная часть применения теории множеств к теории функций действительного переменного и целый ряд чисто математических разделов. При этом интуиционистская математика еще много сложнее «обыкновенной» [1]

Но утопические попытки совершенно уничтожить самую возможность противоречий приводят только к тому, что на практике интуиционисты удовлетворяются «неинтуиционистской» математикой. Кстати сказать, также и формалисты по большей части разрабатывают в области математики не те проблемы, которые выдвинул их «дух», а те, которые выставляет объективная действительность.

Даже в небольшой статье невозможно как следует изложить эти два главнейшие течения математической мысли, не упомянув при этом о разных других «системах» и «уклонах». У математиков, стоящих на идеалистических позициях, трудно найти две совершенно одинаковые концепции. Как известно, такова уж судьба любой идеалистической «системы», — каждый индивидуальный «дух» создает свою особенную «систему». Однако и того, что было сказано выше, достаточно для общего ознакомления с основными направлениями современной философии математики.

Математика еще не в малой степени находится под влиянием чисто идеалистических теорий. Очередная задача материалистов-диалектиков — распространить свое влияние и на эту область глубин абстрактной науки и установить, что законы материалистической диалектики существуют в математике точно так же, как и вообще в природе, в обществе и в человеческом мышлении. Взаимная критика и дискуссия между формализмом и интуиционизмом не разрешают вопроса: оба течения эти со всеми их ответвлениями полностью идеалистичны, а значит и ненаучны.

Наряду с общеметодологическими задачами перед математиками-марксистами стоят также и практические задания, тесно связанные с теоретической борьбой. Математику необходимо прочно связаться с проблемами техники; в частности в СССР одной из важнейших проблем является проблема индустриализации математики, ее использования в деле социалистической реконструкции.

Борьбу с идеализмом, борьбу за диалектический материализм в современной математике следует вести систематически и неуклонно. Это одна из серьезнейших очередных задач на фронте идеологии.

---

[1] Специалист может убедиться в этом, познакомившись со статьями Брауэра, в «Mathem. Annalen», Bd. 94, 95, 96.

С. Яновская.

ИДЕАЛИЗМ В СОВРЕМЕННОЙ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ [1].

Wer den Feind will verstehen, muss in Feindes Lande gehen.
Кто желает знать врага, тот должен побывать во вражеской стране.

Ленин.

Характеризуя развитие буржуазной политической экономии, Маркс отмечает, что в эпоху Адама Смита и Рикардо еще имелась возможность беспристрастного изучения предмета даже в рамках буржуазного кругозора, ибо классовая борьба либо находилась еще в то время в скрытом состоянии, либо обнаруживалась лишь в единичных проявлениях. С обострением классовой борьбы после завоевания буржуазией политической власти «пробил смертный час для научной буржуазной экономии. Отныне для буржуазного экономиста вопрос заключается уже не в том, правильна или неправильна та или другая теорема, а в том, полезна она для капитала или вредна, удобна или неудобна, согласуется с полицейскими соображениями или нет».

Так обстояло дело в политэкономии. В естествознании это было еще не так. Буржуазный естествоиспытатель в эпоху Маркса и Энгельса еще сохраняет значительную долю объективного беспристрастия, поскольку он более непосредственно связан с продолжающимся развитием производительных сил общества. Дарвинизм возникает в ту эпоху, когда буржуазная политэкономия уже исчерпала свои творческие возможности и ученые экономисты по выражению Маркса превратились в простых софистов и сикофантов господствующих классов.

Эпоха империализма с характерным для нее загниванием капитализма и чудовищным обострением классовой борьбы, проникшей буквально во все поры общественной жизни, сделала невозможным объективное беспристрастие и в естествознании. Идеалистическая философия буквально овладела всем естествознанием. Появились «философствующие естествоиспытатели», возродившие «на основе естествозна-

---

[1] Доложено в несколько сокращенном виде I Всесоюзному съезду математиков в Харькове. Впервые опубликовано в № 2—3 журнала «Естеств. и марксизм» за 1930 г. В настоящий текст внесены небольшие дополнения и изменения.

ния» наиболее реакционные и метафизические виды идеализма, установившие подлинное единство между буржуазным естествознанием и идеалистической философией. Глубочайшие противоречия империалистического капитализма нашли себе выражение и в естествознании, самый рост которого, сопряженный с крутой ломкой старых теорий, при неправильной (метафизической) методологической установке не минуемо вел все дальше и дальше к идеализму. Настолько, что теперь уже почти нельзя говорить о стихийном материализме б о л ь ш и н с т в а естествоиспытателей. И это несмотря на то, что по с у щ е с т в у всякое подлинное научное открытие в естествознании ведет лишь к торжеству диалектического материализма и может быть уложено на прокрустово ложе философского идеализма подчас лишь путем совершенно невероятных ухищрений.

Математика не избегла в этом отношении общей участи всего естествознания. В ней пышным цветом расцвел философский идеализм, в силу присущих ей особенностей даже раньше, чем в остальном естествознании,—уже со второй половины XIX века.

Вполне законченное выражение философский идеализм в математике получил уже в так называемой л о г и с т и к е, реакцией против которой явился фактически одержавший сейчас победу и н т у и ц и о н и з м. Правильно подмечая слабые стороны у логистов и ударяя по ним, интуиционисты бьют однако не со стороны материализма, а как еще более последовательные философские идеалисты.

На смену метафизического «бытия», формализма, рационализма, аналитического, «чисто» логического строения математики у логистов—пришли «с т а н о в л е н и е», интуиция, иррационализм и «свобода» математических построений у интуиционистов. Причем это явление характерно не для одной только математики: «витализм» в биологии, «социологическая школа» в учении об обществе, «иррационализм» и феноменология в философии являются выразителями все той же тенденции и в других областях человеческого знания. Если мы хотим выяснить себе характерные моменты современной нам «философии математики», на этой противоположности формализм—интуиционизм нам и придется остановиться.

Основными вопросами, которые будут нас при этом интересовать, являются: вопрос об о т н о ш е н и и м а т е м а т и к и к м а т е р и а л ь н о й д е й с т в и т е л ь н о с т и (о предмете математики) и нераздельно с ним связанный вопрос о з а к о н о м е р н о с т я х р а з в и т и я с а м о й м а т е м а т и к и. Так как наиболее полно и ясно эта противоположность взглядов выражена в работах по философии математики Рёсселя, с одной стороны, и Вейля,—с другой, именно на этих двух мыслителях мне и придется конечно лишь в самых кратких чертах остановиться.

РЁССЕЛЬ

Имя Рёсселя у нас широко известно благодаря двум его неоднократно цитированным фразам: что «математика может быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем ни о чем мы говорим,

ни то, верно ли то, что мы говорим» и что «геометрия бросает не более свету на природу пространства, чем арифметика на население Соединенных штатов»,—фразам, давшим справедливое основание предполагать в Рёсселе, во-первых, идеалиста, и притом субъективного, гомовского толка, и, во-вторых, формалиста, превращающего занятие математикой в шахматную игру, не имеющую и не желающую иметь ни малейшего отношения к окружающей человека реальной материальной действительности.

На деле однако положение с Рёсселем несколько сложнее, чем это кажется на первый взгляд, и если оба эти предположения в конце концов и оказываются совершенно верными, то именно в силу присущей Рёсселю метафизической, антидиалектической методологии.

«Знание,—пишет Рёссель [1],—форма союза «я» и «не-я», и, как всякий союз, оно боится угрожающего ему подчинения одной части другой—подчинения, насильно приравнивающего вселенную тому, что мы находим в нас самих. Существует широко распространенное философское стремление признать человека мерой всех вещей, признать истину человеческим произведением, признать пространство, время и мир универсалий—свойствами разума, признать, что, если что-либо и есть не созданное разумом, то это не познаваемо и не имеет для нас значения. Этот взгляд ...неверен; но кроме того, что он не истинен, он лишает философское созерцание всего того, что ценно в нем, так как он ограничивает созерцание лишь «я». То, что этот взгляд называет знанием,—это не союз с «не-я», но ряд предрассудков, обычаев и стремлений, составляющих непроходимую завесу между нами и миром вне нас. Человек, удовлетворяющийся такой теорией познания, напоминает человека, никогда не выходящего из своего семейного круга из боязни, что вне его слово его не будет законом».

Из этой цитаты во всяком случае следует, что Рёссель признает объективность и познаваемость внешнего мира [2]. Но этого мало. Если Рёссель формалист, если математика например представляется для него чем-то в роде шахматной игры, то, казалось бы, для него не может быть вопроса об истине как о соответствии мышления предмету,—в лучшем случае истина должна выступать в смысле внутренней согласованности, отсутствия внутренних противоречий в системе. В действительности это не так. «Сознание,—пишет Рёссель,—не творит истины и лжи. Оно творит лишь убеждения, но

---

[1] Вернее, «писал», а не «пишет». Ибо Рёссель вообще большой эклектик и путаник, а проделанная им философская эволюция от путаного объективного идеализма («реализма») в стиле Платона, с некоторой примесью звучавших иногда почти материалистически ноток, к не менее путаному субъективному идеализму в стиле Маха и Вильяма Джемса очень характерна для прогрессирующего загнивания буржуазной философии. В дальнейшем я имею в виду преимущественно Рёсселя первоначальной «формации», отраженной в его «Проблемах философии», так как именно на ней построена в основном та характерная для «логистов» философия математики, против которой и выступили интуиционисты.

[2] Впрочем из нее же явствует и идеализм (в стиле Платона и средневековых схоластиков-реалистов) Рёсселя. Ибо он считает общие понятия (мир «универсалий») существующими независимо от нашего разума.

раз только убеждения созданы, сознание не может сделать их истинными или ложными... Факт делает истинным убеждение, и этот факт ни в каком отношении не зависит от сознания того, кто в чем-либо убежден». Против согласованности внутренней логической стройности как критерия истины Рёссель возражает как потому, что «нельзя доказать возможность лишь одной согласованной системы», так и потому, что «фактически согласованность предполагает истинность законов логики. Законы логики дают основу или скелет, внутри которого мы применяем принцип совместимости,—но сами эти законы не могут быть основаны на этом же принципе... И таким образом мы должны вернуться к соответствию с фактами как к элементу, лежащему в основе природы истины».

Мы видели, что математика по Рёсселю как будто не имела никакого отношения к реальной действительности. Но, с другой стороны, математика есть для него лишь часть логики, а по поводу последней он пишет: «Я смею утверждать, что логика столь же мало может допускать (мифического — *С. Я.*) единорога, как и зоология; ибо логика в такой же мере занимается реальным миром, как и зоология, хотя и его наиболее абстрактными и общими свойствами».

Наконец у Рёсселя можно встретить иногда довольно решительные высказывания против мистики, в состав которой он справедливо включает и пресловутую интуицию, в качестве сверхчувственного и сверхлогического момента нашего мышления призванную справляться со всеми трудностями логического обоснования науки. «Но в действительности,—пишет Рёссель,—интуиция есть лишь особенно высокоразвитая сторона инстинкта и, как всякий инстинкт, достойна удивления в обычной среде, в которой развились привычки (Gepflogenheiten) соответствующего животного; ее полная недостаточность однако обнаруживается сейчас же, как только среда меняется таким образом, что индивидуум вынуждается к самостоятельным действиям». Интуитивные способности,—пишет он там же,—«лучше развиты в детях, чем у взрослых, у собак их вероятно больше, чем когда-либо было у людей. Но кто в этих фактах увидел бы рекомендацию для интуиции, должен был бы сделать из них выводы и снова бегать дикарем в лесах, ярко размалеваться и питаться акридами и диким медом».

И тем не менее, несмотря на все эти (и им подобные — у Рёсселя их немало) высказывания, иногда звучащие почти материалистически, Рёссель не материалист. Более того, на примере Рёсселя ясно видно, как метафизичность, антидиалектический характер его методологии препятствует ему быть материалистом, буквально ведет его к идеализму.

Уже из того, как Рёссель формулирует «основные законы» логики, ясна вся метафизичность его философской концепции, охарактеризованной Энгельсом в известных словах из введения к «Анти-Дюрингу»: «Для метафизика вещи и отражения их в уме, понятия, представляют собой обособленные, твердые, неизменные, раз навсегда данные объекты исследования, подлежащие рассмотрению один вслед за другим и один без другого. Его мышление вращается исключительно в непосредственных противоположениях: его слово: да-да, нет-нет,

а что сверх того — от лукавого. Для него всякая вещь либо существует, либо не существует; точно так же вещь не может быть сама собой и в то же время иной». Именно на этой метафизической точке зрения и стоит Рёссель. Вот как он формулирует «основные законы» логики:

1. Закон тождества: «То, что есть,—есть».

2. Закон противоречия: «Ничто не может быть и не быть».

3. Закон исключенного третьего: «Что-либо должно быть или не быть».

И дальше прибавляет: «Их наименование законами мышления дает повод к недоразумениям, так как важно не то, что мы мыслим согласно этим законам, но то, что явления протекают в согласии с ними; иными словами, важно то, что, когда мы мыслим согласно законам, мы мыслим истинно».

Если для диалектика Энгельса «все существует и в то же время не существует, ибо все течет, все находится в вечном изменении, в процессе постоянного становления и прехождения», то для метафизика Рёсселя самое движение разлагается в неподвижную совокупность состояний. «Обыкновенно принято думать,—пишет он,— то, когда вещь изменяется, она должна находиться в состоянии изменения, и когда вещь движется, то она находится в состоянии движения. С нашей точки зрения это утверждение ошибочно. Когда тело двигается, то мы можем о нем сказать только то, что оно находится в одном месте в одно время и в другом месте в другое время... Движение есть явление, состоящее в том, что тела находятся иногда в одном месте, иногда — в другом, и что в промежуточные времена они находятся в промежуточных местах». По поводу другого «метафизика» Чернова, выступавшего с такой же точкой зрения на движение, Ленин писал: «Движение есть нахождение тела в данный момент в данном месте, в другой... момент в другом месте,—таково возражение, которое Чернов повторяет вслед за всеми «метафизическими» противниками Гегеля. Это возражение неверно: 1) оно описывает результат движения, а не само движение; 2) оно не показывает, не содержит в себе возможности движения; 3) оно изображает движение как сумму, связь состояний покоя, т. е. (диалектическое) противоречие им не устранено, а лишь прикрыто, отодвинуто, заслонено, занавешено».

Для диалектического материализма нет и не может быть непроходимой пропасти между отношением и вещью, всеобщим и единичным, сущностью и явлением. В противоположность этому для метафизика Рёсселя чрезвычайно характерен общий ему со всеми кантианцами и махистами отрыв вещей от отношений между ними, общего — от единичного, формы — от содержания, отрыв, прямым путем ведущий его к идеализму.

Рёссель допускает познаваемость отношений не только вещей к нам, к нашим органам чувств, но и вещей между собою, однако отсюда он не может еще сделать вывод о познании вещей самих по себе, и в системе его появляется момент агностицизма: «Если, — пишет он, — как это предполагает наука и здравый смысл, существует... общее

всеобъемлющее физическое пространство,— взаимоотношение положений физических предметов в физическом пространстве должно более или менее соответствовать взаимоотношению положений того, что мы воспринимаем в нашем индивидуальном пространстве. Это предположение не наталкивается ни на какие трудности... Все указывает на то, что пространственное отношение домов соответствует отношению того, что мы воспринимаем, когда мы смотрим на эти дома». Однако, если мы знаем пространственные отношения между вещами, это по Рёсселю еще ничего не дает нам для познания самого пространства: «Мы не можем знать, каково это пространство само по себе, но мы можем знать характер распределения физических предметов, вытекающий из их пространственных взаимоотношений: мы познаем скорее отношение расстояний в физическом пространстве, чем сами расстояния... Мы можем знать все то, касающееся физического пространства, что слепой от рождения может узнать от других людей о зрительном пространстве. Мы можем знать отношения, необходимые для сохранения соответствия с тем, что мы воспринимаем, но не можем знать природы тех элементов, которые стоят в этом отношении». И наконец «мы приходим к выводу, что, хотя отношения физических предметов познаваемы на основании соответствия их с отношениями восприятий, сами физические предметы в их внутренней природе остаются непознаваемыми, поскольку речь идет о познании при помощи органов чувств».

Метафизически отрывая отношения от вещей, общее от единичного, Рёссель вынужден поместить отношения в «особый» мир, отличный от мира вещей, мир платоновских универсалий. И действительно он заявляет, что отношения имеют повидимому существование, отличное в известном смысле от физических предметов. Разбирая суждение «Эдинбург лежит к северу от Лондона», Рёссель настаивает на том, что выражаемое им отношение между двумя местами существует независимо от нашего знания. «Мы должны признать,— пишет он,— что как само отношение, так и то, между чем это отношение устанавливается, не зависит от мышления, но относится к независимому миру, который мышлением воспринимается, но не создается». Однако «этот взгляд встречается с той трудностью, что отношение «к северу от» существует, как кажется, не в том же смысле, в котором существуют Эдинбург и Лондон. Если мы спросим, когда и где существует это отношение, то ответ должен гласить: «никогда и нигде». Нет ни такого места, ни такого времени, где существует отношение «к северу от»... Оно не во времени и не в пространстве, оно не материально и не духовно; и все же оно есть нечто». И вот Рёссель помещает это «нечто» в особый «мир универсалий», «который может быть описан как мир бытия, неизменный, строгий, точный, увлекательный для математика, логика, творца метафизических систем, и для всех, возлюбивших совершенство больше жизни. Мир бывания изменчив, неопределенен, без точных границ, без всякого ясного плана-системы... Но по справедливости оба мира имеют право притязать на наше беспристрастное вни-

мание, они оба реальны и оба важны для метафизики». Трудно сказать, чего тут больше: объективного идеализма в стиле Платона или «предвосхищения» будущей махистской установки автора с «нейтральным» веществом, которое «не материально и не духовно, но все же есть нечто»!

Математика и логика относятся конечно к «миру универсалий». Несмотря на весь свой «реализм», Рёссель умудрился таким образом оторвать все же математику от реального мира вещей и превратить ее в ту самую пустую, формальную и бессодержательную науку, о полной беспредметности которой уже шла речь в самом начале моего изложения его точки зрения. Ибо оторванное от вещи отношение есть для Рёсселя л и ш ь ф о р м а, пустой сосуд для содержания, а не самое содержание. В его логике отношение выражается не предложением, а функцией-предложением (Satzfunktion), по поводу которой он пишет: «Функция предложения должна быть рассматриваема как простая схема, лишь как оболочка, как пустой сосуд для значения, а не как нечто в себе содержательное».

Относясь к этому неподвижному и неизменному «миру универсалий», математика Рёсселя сама насквозь метафизична и неподвижна. Бесконечность в ней носит исключительно актуальный характер и так же заранее дана во всех своих элементах и отношениях, как и любое конечное собрание вещей. Вопрос о существовании в бесконечном собрании некоторого определенного элемента п р и н ц и п и а л ь н о представляет поэтому не бо́льшие трудности, чем вопрос о существовании его в некоторой конечной, неизменной совокупности. На него можно ответить только «да» или «нет», о д и н из этих двух ответов и только о д и н непременно должен иметь место, хотя бы мы и не имели еще в данный момент возможности выбора между ними (как например для вопроса о существовании 100 нулей подряд где-нибудь в разложении числа π в бесконечную десятичную дробь). В частности натуральный ряд чисел дан во всех его элементах и отношениях между ними. «Если мы говорим,—пишет Рёссель,—что мы «располагаем» числа различным образом, то это—неточное выражение: в действительности мы обращаем наше внимание на определенные отношения между натуральными числами, которые в свою очередь вызывают тот или иной порядок. Мы столь же мало можем «упорядочить» натуральные числа, как и звезды на небе; но точно так же, как для неподвижных звезд мы можем обратить внимание либо на порядок их яркости, либо на их расположение на небосклоне, так мы можем наблюдать разнообразные отношения между числами, которые могут быть применены для установления многочисленных одинаково допустимых расположений чисел». «Единственный произвол в отношении различных расположений некоторого множества элементов состоит в нашем внимании; ибо сами элементы имеют всегда все порядки, к которым они способны».

Бесконечно разворачивающейся, с т а н о в я щ е й с я ч и с л о в о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и у Рёсселя нет. Всякая последовательность заранее дана порождающим ее законом. Более того,

последовательность и есть не что иное как закон, отношение, ее порождающее.

Никакого изменения, развития, даже «расширения» понятий в математике нет и не может быть. «Одной из ошибок, — пишет Рёссель, — препятствовавших установлению правильных определений на этот счет, является всеобщее мнение, что всякое расширение числа обнимает предыдущие виды как частные случаи. При рассмотрении положительных и отрицательных целых чисел полагали, что положительные числа можно отождествлять с первоначальными, лишенными знака целыми числами. Думали также, что дробь с знаменателем единица может быть отождествлена с натуральным числом, представляющим ее числителя. Полагали, что можно указать иррациональным числам, например корню квадратному из двух, место среди рациональных. Их считали бо́льшими некоторых из последних и меньшими других. Рациональные и иррациональные числа должно было быть возможным соединять затем в одно множество действительных чисел... Все эти допущения были ошибочными». Для Рёсселя таким образом может итти речь лишь об установлении *нового* понятия, но не об изменении, развитии, обобщении старого. Развитии, настолько необходимом для науки, что согласный в этом вопросе с Рёсселем Пуанкаре назвал однажды математику искусством называть новые вещи старыми именами. Явно с целью крылатой фразой избавиться от «проклятого» вопроса.

Зато математика для Рёсселя целостная, единая наука, прочно обоснованная в формальной логике, основательно ею скрепленная и цементированная. Все части ее *сводятся* одна к другой, и вся она в целом — к логике. Так, неевклидова геометрия через клейновскую интерпретацию например сводится к евклидовой, евклидова через аналитическую геометрию, в свою очередь, — к арифметике, к которой, через теорию предела и вещественного числа, сводится, с другой стороны, и анализ. А так как комплексное число есть пара вещественных, вещественное — *отношение* (свойство) рациональных, дробное — отношение целых, а целое (положительное и отрицательное) — натуральных, то остается обосновать лишь натуральный ряд чисел, фактически три небольших слова «и так далее», представляющих единственное в нем затруднение, — чтобы была обоснована вся математика. Последнее Рёссель и выполнил путем сведения принципа *полной математической индукции*, выражающего сущность этого «и так далее», к некоторой формуле, записанной на языке его символической логики и призванной служить *определением* натурального числа. «Применение математической индукции при доказательствах, — пишет он, — было в прошлом чем-то в роде мистерии». Но «математическая индукция — определение, а не принцип. Существуют определенные числа, для которых она справедлива, и другие, — для которых нет. Мы *определяем* натуральные числа как такие, к которым при доказательствах применим принцип математической индукции... Отсюда следует, что такие доказательства могут быть применены к натуральным числам. Это не какая-нибудь мистическая интуиция или какая-нибудь аксиома или принцип. Это просто следует

из самого предложения. Если «четвероногие» определены как животные с четырьмя ногами, то отсюда следует, что животные, имеющие четыре ноги, четвероногие. Совершенно так же обстоит дело с числами, удовлетворяющими математической индукции».

Общеизвестно, что «сведение» это нелегко далось Рёсселю. Ему пришлось построить или, вернее, значительно развить для этой цели логическое исчисление Фреге и Пеано, и притом так, что злой язык интуициониста Брауэра имел все основания бросить ему обвинение в том, что у логистов не арифметика построена на логике, а, наоборот,— логика списана с арифметики; и притом списана с арифметики конечных множеств и незаконно распространена на бесконечные. Но главная беда состояла все же в том, что все здание оказалось карточным домиком, выстроенным на песке. Его разрушили простые, еще из древности известные, антиномии, его оказалось возможным кое-как скрепить при помощи теории «типов», но либо ценою жертвы огромными, основными частями математики, в роде учения о верхней границе, несчетности континуума и т. п., либо ценою введения «аксиомы сводимости», против которой в конце концов самым решительным образом выступил сам ее автор.

Тут мне хочется сделать одно — весьма существенное с нашей точки зрения — замечание. Того обстоятельства, что Рёссель—идеалист, платоник, в процессе дальнейшего своего развития скатившийся от объективизма, хотя бы в стиле Платона, к откровенному субъективизму маховского толка, не станут конечно отрицать и наши механисты. Более того, они с возмущением отвергнут всю его «логистику». Но именно «отвергнут», с порога (как замечает Ленин по поводу плехановского опровержения махизма), не имея возможности преодолеть ее по существу. Ибо их методологические установки по существу тождественны с рёсселевскими. Что Рёссель — метафизик чистейшей воды, мы уже имеем возможность видеть. А ведь метафизичность в естествознании, «неспособность его взглянуть на мир как на процесс, как на вещество, которое находится в непрерывном развитии» является одною из основных, подчеркнутых Энгельсом и Лениным специфических черт механистического естествознания. Другою существеннейшею чертою этого естествознания является «исключительное приложение мерила, заимствованного из механики, к химическим и органическим явлениям, т. е. к таким явлениям, в области которых механические законы, хотя и продолжают конечно действовать, но отступают на задний план перед другими, высшими законами». И Рёссель отнюдь не чужд и этой второй специфической ограниченности механизма в естествознании. По крайней мере на той ступени своего развития, когда в упоении от первого, казалось, полностью удавшегося здания математической «логистики» он писал свои «Проблемы философии», Рёссель полагал, что з а д а ч а н а у к и состоит в сведении всех явлений природы к м е х а н и ч е с к о м у (скорее даже кинематическому, в свою очередь сводящемуся к совокупности состояний) движению. «Физика,—пишет он,—более или менее бессознательно пришла к тому выводу, что всякое явление природы должно быть сведено к движению. Свет, тепло и звук—все это обязано своим

возникновением волнообразным движениям, идущим из тела, из которого эти явления исходят, к человеку, видящему свет, чувствующему тепло и слышащему звук. То, что находится в волнообразном движении, это — или эфир, или первичная материя; но и то и другое философия назвала бы материей. Единственные качества, которые ей приписывает физика, это положение в пространстве и способность к движению согласно законам движения. Наука не отрицает, что возможны и другие качества материи; но если она ими и обладает, то эти другие качества не интересны для науки и ни в каком отношении не способствуют объяснению явлений»[1].

Наконец нечего и говорить, что, если в отношении естествознания у Рёсселя, особенно на той ступени его развития, к которой относятся его «Проблемы философии», еще и звучат иногда почти материалистические нотки, то в области истории Рёссель является совершеннейшим мистиком и идеалистом, разделяя таким образом с механистическим естествознанием XVIII века и его третью, отмеченную Энгельсом в «Людвиге Фейербахе» черту.

Наши современные механисты, по обыкновению могут возразить конечно, что все это к ним не относится, ибо перечисленные три ограниченности механистического естествознания относятся, мол, лишь к «механическому» естествознанию XVIII века, а не к современному механизму. И вот тут-то как раз и замечательно то трогательное «методологическое» единодушие, которое объединяет Рёсселя с Сарабьяновым и проявляется в отрыве ощущения от мира вещей вне нас, отрыве вещи от отношения, ведущем Рёсселя через агностицизм к идеализму, а в теорию познания Сарабьянова (и Плеханова, которого тов. Сарабьянов защищает в этом вопросе против Ленина), вносящего момент агностицизма и кантианства. Для тов. Сарабьянова (совершенно так же, как и для Рёсселя), из того, что мы знаем связи, отношения между вещами, отношения их к нам, к нашему воспринимающему аппарату (ощущения), еще не следует, будто мы знаем самые вещи. Ощущения наши суть не зеркальные отображения вещей, а лишь условные знаки, иероглифы, ничем не связанные с вещью. Теория отражения при этом подменяется теорией соответствия, согласно которой отношения между нашими ощущениями, правда, соответствуют отношениям между вещами, подобно тому, как отношениям верха и низа на географической карте соответствует отношение севера к югу в действительном мире, но природа вещей остается позади наших ощущений, никак в них не отражаясь, что возможно только в том случае, если отношение внешне, безразлично к вещи[2].

Последовательно стоящий на этой точке зрения Рёссель делает отсюда агностический вывод о принципиальной непознаваемости природы вещей. Тов. Сарабьянов пытается избегнуть этого вывода

[1] «Проблемы философии», изд. П. П. Сойкина, 1915 г., стр. 21.

[2] В простейших пространственных (вообще количественных) отношениях такие внешность и безразличие действительно имеют место, но ведь наше знание материи не ограничивается элементарной математикой.

при помощи метафизического локковского разделения качеств на первичные и вторичные. Предпринятая с негодными средствами попытка эта терпит крушение. Перед тов. Сарабьяновым остаются лишь 2 пути: либо действительный (а не только «терминологический», как это сделал Плеханов) отказ от «иероглифической» теории познания, либо открытый переход в лагерь Гельмгольца и Рёсселя. Однако предоставим слово самому тов. Сарабьянову.

«В том-то и дело,—пишет тов. Сарабьянов,—что наши звуковые, цветовые, осязательные, обонятельные и вкусовые ощущения вовсе не говорят ни о звуке, ни о цвете, ни о теплоте, запахе, сладости, которые были бы присущи воспринимаемым нами предметам. Они являются чем-то вроде иероглифов (условных знаков), относящихся к определенным свойствам предметов, действующих на субъекта»... «Будучи сомкнута с локковской теорией первичных и вторичных качеств, т. е. будучи сильно ограничена, «иероглифическая» теория познания безусловно правильна». И далее еще и еще раз говорит о «так называемых вторичных качествах, которые действительно не отображают предмет, а только соответствуют его определенным свойствам». «Возьмем простой пример. Я говорю, что передо мною стоит черная прямая линейка весом в 20 граммов. «Черная прямая линейка весом в 20 граммов»— что это означает?»—спрашивает тов. Сарабьянов и отвечает, заявляя, что «чернота не свойственна линейке, в черноте нет адэкватного выражения вещи, «черная» лишь говорит о таком-то свойстве линейки, «черная» — знак этого свойства. «Иероглифической» точке зрения здесь честь и место, ибо «чернота» есть «вторичное качество». Другое дело такое «первичное качество», как «прямизна». «Прямая» есть зеркальное отображение объективной прямизны линейки; линейка сама по себе прямая, и доказать это очень легко... Мною линейка ощущается «черной», другим животным, может быть, «красной», третьим — еще как-нибудь, а сама линейка бесцветна и лишь вызывает в эфире определенные движения. Прямизна же (относительная конечно, а не абсолютная) существует в действительности, она в данном примере имманентна (внутренне присуща) линейке»[1]. Тов. Сарабьянов не говорит ничего о том, как быть с полной адэкватностью ощущения прямизны или непрямизны линейки опущенной в воду, отчего она кажется, как известно, изломанной, или линейки, на которую смотрят из воды, отчего она кажется разбитой на две совершенно отдельные и отодвинутые друг от друга части, или наконец линейки, к которой приложен в качестве мерила «прямизны» кривой измеритель, так же, как не разъясняет, впрочем, того, что им понимается под «относительною прямизною» — уж не прямизна ли в отношении к определенному измерителю, которая окажется кривизною в отношении к другому, а таким образом опять-таки превратится из «имманентного свойства» в презренное «отношение».

С «первичными качествами», против отождествления которых с «иероглифами» единственно и выступал по мнению Сарабьянова Ленин, когда ругал Плеханова за «иероглифический» материализм, об-

[1] Вл. Сарабьянов. В защиту философии марксизма, стр. 52—56.

стоит таким образом не лучше, чем с «вторичными», и если бы тов. Сарабьянов был чуточку последовательнее, он неизбежно должен был бы целиком стать на ту «иероглифическую» точку зрения, которую последовательно защищал кантианец Гельмгольц и от которой по существу так и не отказался Плеханов. (Замечательно, что критиковавшие механистов деборинцы в этом существеннейшем для теории познания диалектического материализма вопросе, движимые желанием замазать ошибку Плеханова, на практике сомкнулись с механистами.)

С точки зрения диалектического материализма всякое ощущение есть отношение вещи вне нас к нашему воспринимающему аппарату, отражение вещи в нем (именно «отражение», ибо, повторяю, в действительности имеют место и такие отношения, которые относительно внешни к сущности связанных ими вещей, ощущение же отнюдь не безразлично к природе воспринимаемого нами объекта). Но, как в аналитической геометрии то обстоятельство, что мы познаем кривую через ее отношение к координатным осям не мешает, а помогает нам познавать ее имманентные, независимо от этих осей присущие ей, свойства, так называемые, инварианты, так и в теории познания ощущения наши являются не стеною, как у Канта, наглухо отделяющею нас от познаваемого предмета, а мостом к нему, ибо и тут через отношения мы идем к абсолютному. И опять-таки подобно тому, как в аналитической геометрии инварианты познаются через изменение координатных осей, являются таковыми именно в их изменении, отражая таким образом независимые от этого изменения свойства кривой, так и в человеческой практике независимые от человека и его воспринимающего аппарата свойства вещей познаются через изменение человеком его отношений к ним, через практическую деятельность. Только через практику, через активное изменение своего отношения в внешнему миру, внешнего мира к себе, частей его друг к другу человечество познает независимые от нашего «я», объективные, имманентные, «инвариантные» свойства вещей, идя таким образом от относительного к абсолютному. Вот почему Ленин так настаивал на внесении критерия практики в самоё теорию познания. Не наряду с теорией познания, не отдельно от нее, а в ней, внутри нее необходим критерий практики. Иначе неизбежен отрыв вещей от отношений между ними, иначе нет пути от относительного к абсолютному, иначе неизбежно превращение всех наших ощущений из моста между нами и внешним миром в непроходимую пропасть. От критерия практики внутри теории познания никакое деление на «первичные» и «вторичные» качества избавить нас не может. Отрыв же вещей от отношений между ними, отказ от критерия практики в теории познания при последовательном проведении ведет к агностицизму, даже откровенному идеализму в конце концов, если ощущение окончательно отрывается от вещи в себе и утверждение о существовании вещей, отражаемых нашими ощущениями, объявляется «чистейшей метафизикой». Именно это и случилось с Рёсселем, кончившим откровенным признанием своих «реалистических» «ошибок» и объявлением себя махистом. Без преодоле-

ния механизма, являющегося главной опасностью в наших рядах, и плехановского иероглифического материализма, принципиальное отличие которого от ленинской постановки вопроса замазывалось деборинским философским руководством, невозможна таким образом подлинная борьба с рёсселевским формализмом и идеализмом в математике.

ИНТУИЦИОНИСТЫ

Первым против Рёсселя и «логистов» выступил Пуанкаре. С тех пор число противников Рёсселя выросло в легион. Являясь в общем метафизической противоположностью логистов (Пеано, Фреге, Рёсселя), интуиционисты представляют собой во многих отношениях более сильных противников материализма, ибо они «умнее». Правильно подмечая слабые места у Рёсселя и направляя против них огонь критики, они подкупающе действуют иногда на материалистически настроенного читателя и требуют поэтому к себе во всяком случае не менее настороженного внимания с нашей стороны, чем логисты. Тем более что в так называемой «Московской математической школе» интуционистские идеи были встречены доброжелательно даже группой молодых советских математиков во главе с проф. Хинчиным (статью последнего см. в «Вестнике Комакадемии», № 16). Один из признанных вождей этой «школы» проф. Л у з и н является вполне законченным интуиционистом. В докладе о современной борьбе течений в обоснованиях математики на первом конгрессе по «теории познания в точных науках» (Прага 1922 г.) проф. А. Ф р е н к е л ь в числе представителей этого направления упоминает и проф. Л у з и н а[1]).

Если Рёсселя можно назвать аналитиком, то интуиционисты являются с и н т е т и к а м и в кантовском смысле этого слова. Они за н е с в о д и м у ю к логике математику, представляющую в отношении к ней некоторое а б с о л ю т н о н о в о е качество. Принцип полной математической индукции не определение, а принцип, обоснованный не в логике, а на и н т у и ц и и. Внутри самой математики отдельные части, отдельные доказательства тоже не сводятся друг к другу, а представляют собой нечто н о в о е, не содержавшееся в предыдущем, н е с в о д и м о е к нему. Каждое доказательство имеет свои особые, специфические, целостные черты, ему одному присущие. «Разве мог бы думать естествоиспытатель, которому приходилось исследовать слона только в микроскоп, что он достаточно хорошо знает это животное?» — писал Пуанкаре. «То же — и в математике. Логик, разложивший каждое доказательство на ряд элементарных операций, еще не обладает всею реальностью; от него совершенно ускользает что-то нам не известное, что сообщает единство доказательству. Нечего удивляться работе каменщика в зданиях, возводимых нашими учителями, когда мы не можем понять плана архитектора. В о т э т о г о о б щ е г о в з г л я д а н а ц е л о е л о-

[1] См., «Erkenntnis», I. Bd., H. 2—4., 1930.

гика не может нам дать,—его нужно искать у интуиции».

Если Рёссель был за математику формальную, не имеющую своего особого, отличного от логики, предмета, то интуиционисты — за предметную математику.

Если Рёссель стоял на точке зрения бытия неподвижного, застывшего, законченного, то для интуиционистов все находится в становлении. Лишь очень частный случай последовательностей образуют последовательности, разворачивающиеся по определенному закону. Большинство последовательностей — свободно становящиеся, лишенные какой бы то ни было закономерности. Континуум и есть «среда свободного становления» этих последовательностей. Для него характерно не отношение элемента к множеству, а части к целому. Континуум и натуральный ряд чисел и представляют собой основной предмет математики. Принцип полной математической индукции есть основной принцип, порождающий этот ряд, в котором каждый член еще до установления каких бы то ни было операций представляет собой некоторый индивидуум, абсолютно отличный от всех других. Натуральный ряд чисел никогда не дан полностью в действительности, но лишь в неограниченной возможности его дальнейшего и дальнейшего построения. На смену актуальной бесконечности идет потенциальная. Поэтому в отношении бесконечной совокупности лишен всякого смысла вопрос о том, существует ли в ней некоторый элемент такого-то рода, до тех пор по крайней мере, пока этот элемент в действительности не «построен». И уже во всяком случае на вопрос о его существовании нельзя отвечать по закону исключенного третьего: либо «да», либо «нет», — одно из двух непременно должно иметь место. Утверждение о существовании чего-либо не есть таким образом настоящее предложение, а лишь абстракция предложения, на место которой еще должно быть подставлено конкретное «построение» и единственное значение которой толкать к его отысканию. Теоремы о существовании в математике лишены поэтому всякого смысла, ценно только примененное в них «построение». Математика действительно переживает кризис, и без жертв выйти из него нельзя, но жертвовать нужно именно теоремами существования и безоговорочным применением принципа исключенного третьего. Такова по крайней мере точка зрения Вейля.

Более того, сам формалист Гильберт, непосредственно против которого интуиционисты собственно и выступают, является во многих отношениях типичным интуиционистом. Математика для него вообще не состоит из очевидных истин, но является смелым теоретическим «построением», «таким образом крайней противоположностью аналитической само-собой понятности», — добавляет Вейль. Что же касается его математики, обосновывающей формальную математику при помощи содержательного уже мышления, то она занимается «сверхлогическими конкретными объектами, которые можно обозреть вполне во всех частях и которых указание, различение, следование друг за другом и соприкосновение друг с другом дано непосредственно, на-

глядно (в созерцании) вместе с предметами, как нечто, что не может уже быть сведено или что нуждается в сведении к чему-нибудь другому» (Гильберт). Поэтому, говорит Вейль, Гильберт согласен с Кантом,— который впрочем также подчеркивал как существенное в алгебре символическую конструкцию с наглядными знаками, — в том, «что математика располагает независимо от всякой логики обоснованным содержанием и поэтому нигде и никогда не может быть основана на одной только логике»[1].

Что же однако при этом понимается под всеми этими «новыми» словами? Что это такое: интуиция, предметность математики, становление, построение?

Не думайте, что если интуиция противополагается рационализму рёсселевской логистики, то она эмпирического происхождения. Нет, это особая сверхлогическая, с одной стороны, сверхчувственная — с другой, способность нашего мышления, заменяющая у интуиционистов (особенно ярко это было выражено уже у Эрмита) тот особый мир универсалий, о котором шла речь у Рёсселя, и лишь переносящая его в субъект из того независимого от нашего субъективного сознания положения, которое он у Рёсселя занимал. «Созерцание (интуиция), — говорит, излагая Вейля, гуссерлианец Беккер (свое согласие с которым Вейль не раз свидетельствовал), — во всяком случае понимается не как «чувственное» или «эмпирическое» созерцание, но как род непосредственной достоверности, в которой нам даны основные логические, арифметические и комбинаторные факты» (причем «факт» тоже не должен пониматься эмпирически). В остальном она должна оставаться совершенно таинственной и не поддающейся осознанию. «Современный ученый,—пишет Бутру, — во всяком случае нестарается объяснить интуицию, он ни в малейшей мере не претендует на то, чтобы понять полностью, в чем она состоит и при каких условиях действует. Ее определения большей частью остаются отрицательными. Математические истины,—говорит современный ученый, — не представляют собой ни следствий из экспериментальных фактов, ни результатов логических построений или дедукций: они предполагают таким образом тот способ трактовки, который не совпадает ни с чувственным опытом, ни с разумом... Когда мы стараемся его изолировать, удается отметить некоторые из его черт, но в общем и целом мы все же должны признать, что он остается таинственным».

Не лучше обстоит дело и с предметностью математики, под которой надо понимать не соответствие математических абстракций действительности — пусть неполное, приближенное, — а именно непосредственную данность в субъективном созерцании. «В силу основного принципа трансцендентального идеализма, — пишет все тот же Беккер, — «есть» («существует») предмет, «имеет место» предметное отношение (Sachverhalt) лишь в силу того и поскольку оно может обнаружиться в сознании с той степенью и тем родом очевидности, которые для него характерны. Все «трансцендентное» «строится» в чистом сознании, «действительность» может быть

[1] «Über das Unendliche», S. 171.

ему приписана лишь в силу разумно обоснованных доказательств действительности» («Wirklichkeitsthesen») [1].

Становление Вейля, как это ни странно, само носит метафизический характер, ибо начисто оторвано от бытия и противопоставляется всякой закономерности. В то время как например гегелевское истинное бесконечное представляет собой синтез закона, конечной формы, с бесконечно становящимся содержанием, Вейль становится именно на точку зрения гегелевской «дурной», «глупой» бесконечности, на которой в первую очередь он и хочет обосновать всю,— именно закономерности изучающую,— математику. Что касается наконец вейлевского «построения» в применении к «существованию», то тут для меня остается пока еще неясным вопрос, не представляет ли оно собой отказа от принципа исключенного третьего, в его наиболее общей форме являющегося лишь утверждением принципиальной разрешимости всякой задачи, с тем, чтобы стать примерно на такую точку зрения (ее отстаивал еще Кронекер): «Не будем спрашивать, откуда взялась такая-то задача, будем считать ее решеной и посмотрим, какие еще задачи тогда можно будет к ней свести». Подобно тому, как если бы биолог принципиально отказался заранее от ответа на вопрос, что такое жизнь, но попробовал бы разрешить свои биологические задачи в предположении, что это уже известно. Точка зрения для теории групп например вполне законная, но вряд ли заслуживающая методологической экстраполяции на всю математику вообще [2].

Интуиционисты таким образом являются подлинно метафизической противоположностью «логистам». Они их не дополняют и исправляют, а из одной крайности бросаются в другую, совершенно подобно тому, как это делают виталисты в биологии по отношению к механистам.

Но противоположности сходятся. Фактически Вейль Рёсселя не преодолел. Он лишь более последовательно перешел на точку зрения субъективного идеализма, пользуясь все той же неправильной, метафизической методологией отрыва общего от единичного, вещей от отношений, абсолютной «внешности» и «безразличия» отношений к вещам, объединенным, связанным

---

[1] Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie usw., S. 10.

[2] Математический «эффективизм», с точки зрения которого задача считается решенной лишь тогда, когда она сведена к конкретному «построению» или «конечному числу испытаний», подчас носит отнюдь не материалистический, а чисто формальный, характер. Таково например требование считать геометрическую задачу решенной лишь в том случае, когда она сведена к построению при помощи циркуля и линейки. С другой стороны, доказательства «существования» часто имеют очень «эффективное» значение. Так, из доказательства сходимости некоторого ряда (т. е. «существования» предела для последовательности сумм его членов) прикладник сделает не одно полезное заключение на счет практической его применимости. Их значение можно проследить также на так называемых «качественных» методах анализа, дающих возможность сделать предварительную общую оценку и выделить основные направления в без того чрезвычайно громоздких и сложных вычислениях. Верно однако то, что доказательство «существования» только ради самого доказательства ровно ничего не стоит. О «качественных» методах анализа см. выше статью тов. Люстерника.

ими. Математика,— я еще буду говорить об этом,— есть, особенно в наиболее абстрактных своих частях, наука о наиболее «внешних» и «безразличных» отношениях, допускающих поэтому различные «интерпретации». Отсюда огромная роль изоморфизма [1] в математике, выражающего общую различным «интерпретациям» структуру некоторых изоморфных друг другу систем вещей и таким образом дающего возможность изучения связей между двумя различными областями.

Для Вейля, совершенно так же как и для Рёсселя, это не так. Для него обнаружение изоморфизма между двумя различными областями, например между «пространством» троек чисел, связанных арифметическими соотношениями, и евклидовым пространством трех измерений означает не обнаружение связи между арифметикой и геометрией (предполагающей такое развитие понятия числа и операций над ним, которое дает возможность все лучшего и лучшего, вплоть до адэкватного, отображения геометрических соотношений при помощи чисел), т. е. не дальнейший шаг по пути углубления нашего познания о мире, а «непроходимую границу» познания. «Наука,— пишет он,— может установить область своих предметов (Sachgebiet) всегда лишь до некоторого изоморфного отображения. В частности она относится совершенно безразлично к «сущности» своих объектов. То, что отличает действительные точки в пространстве от троек чисел или других интерпретаций геометрии, можно лишь знать («kennen» в отличие от «wissen») в непосредственном, живом созерцании. Идея изоморфизма обозначает само собой понятную непроходимую границу познания (des Wissens)». Что граница эта подвижна уже в самой математике, по мере развития — конкретизации —которой она отодвигается все дальше и дальше вглубь, во внутрь изучаемых ею объектов, что в идее изоморфизма тоже нужно таким образом видеть не стену, а мост между отношениями и вещами,— это, понятно, ускользает от Вейля, ибо ему, так же как и Рёсселю, чужда идея диалектического изменения, развития, конкретизации понятий и отношений при помощи и через посредство критерия практики. Неудивительно, что и ощущения представляют собою для Вейля не мост, а стену между вещами (внешним миром) и нами, нашим субъективным «я». Ибо для него, как и для Канта и Гельмгольца, ощущение есть не образ, а знак, символ, иероглиф вещи, нисколько на нее не похожий. Последовательно стоя на иероглифической точке зрения, базирующейся на отрыве ощущения от вещи, вещи от отношения, на «безразличии», «внешности» отношения к вещам, ими связанным, он сводит все отношения к материальной деятельности к количественным, т. е. допускающим несколько качественно различных (лишь изоморфных друг другу)

[1] Пусть имеем две системы вещей, связанных между собой определенными отношениями. Если каждой вещи одной системы соответствует некоторая вещь другой, и то же имеет место и для каждого отношения (или операции) между ними, то системы называются изоморфными друг другу, хотя бы вещи и отношения первой системы и не были похожи на соответствующие вещи и отношения второй.

моделей, сводя таким образом фактически всю науку к математике и не замечая того, что уже физика принципиально не сводима к математике. Ибо под такими понятиями как «электрон», «квант» и т. п. нельзя понимать ничего иного, кроме именно электрона и кванта, в то время как диференциальные уравнения гидродинамики, выражающие количественные соотношения, объективно существующие в этой области, могут оказаться применимыми и в области электро- или термодинамики, в то время как «прямую» евклидовой геометрии можно «интерпретировать» (как это сделал например Пуанкаре при помощи окружности) весьма различными способами. Это дает нам возможность изучения еще с одной стороны новых многообразий трех или большего числа измерений, изоморфных данному геометрическому пространству (таковы например «физиологическое пространство», «пространство цветов спектра» и т. п.), но к этому не сводится ни изучение физического пространства, с одной стороны, ни цветов спектра, —с другой.

Вейль — субъективный идеалист: не внешний мир с его точки зрения — пусть неполно, приблизительно,— но все же *отражается* в наших понятиях, а мы строим этот объективный мир «из мне в созерцании непосредственно данного», причем выражаем его «*лишь в символах*», а не конкретных, содержательных понятиях. «Если цвета для Гюйгенса были «в действительности» колебаниями эфира, то теперь они представляются лишь как математические функции (Funktionsverlaufe) периодического характера, причем в функциях в качестве представителей отнесенной к координатам пространственно-временной среды выступают четыре независимых переменных. Что таким образом остается в конце концов,— это символическая *конструкция*, именно в том смысле, в каком она внесена Гильбертом в математику». «В аксиоматическом формализме сознание предпринимает попытку,— пишет Вейль о Гильберте,— «перепрыгнуть через собственную тень», оставить за собой материал данного (нам — *С. Я.*), выразить трансцендентное; но, само собой понятно, лишь в символе». «Нельзя отрицать, что в нас живет, с чисто феноменалистической точки зрения, совершенно непонятная потребность, толкающая нас к *целому*. Именно математика демонстрирует это с особенной ясностью. Но именно из нее мы узнаем также, что эта потребность может быть удовлетворена лишь при одном условии: если мы удовлетворимся символом...»

На примере Вейля с особенной ясностью видно, как *интуиционизм*, стремление исходить и оставаться лишь при *непосредственно данном*, с неизбежностью ведет к *формализму*, отказу от всякого конкретного содержания при малейшей попытке выйти за пределы собственного «я», т. е. не быть просто солипсистом.

С точки зрения диалектического материализма идеализм не состоит просто в отрицании внешнего мира, а в признании во взаимоотношении *материя* (*объективная реальность*), с одной стороны, дух,—с другой, первичным, основным — «духа», сознания, субъекта, а не объекта. Именно из такого определе-

ния идеализма и исходит Вейль. Для Гельмгольца,—пишет он,—основной принцип «построения» объективного мира формулируется так: «Всякое различие возникающих у нас восприятий основано на некотором различии реальных условий»[1]. Недовольный этим Вейль замечает: «Раньше всего, основная идея (der Kerngedanke) идеализма выражается в переворачивании вышеприведенного положения: объективная картина мира не может допускать никаких различий, которые не выражались бы в различиях восприятия».

Но в таком случае на чем основана закономерность, гармоничность, как выражается Вейль, такого «объективного мира», почему эти закономерности могут быть выражены например в математических формулах? Исходя из своей идеалистической точки зрения, Вейль может ответить на этот вопрос лишь одним способом: гармонию создает бог.

«Простое допущение внешнего мира,—пишет он,—не объясняет собственно ничего из того, что оно тем не менее должно было объяснить, но вопрос о его реальности неразрывно сливается с вопросом об основании для закономерно-математической гармонии мира. Таким образом последний ответ лежит все же по ту сторону знания, только в боге».

Положение Ленина о том, что всякий идеализм есть поповщина, блестяще подтверждается таким образом и на Вейле.

Отношение между математикой и действительностью, способность первой выражать объективные закономерности последней, остается при этом мистической тайной, разъяснения которой, как видим, напрасно было бы искать в системе Вейля.

И конечно — не только Вейля. Вот что пишет например по тому же поводу другой интуиционист П. Бутру: «Если математика почти точно согласуется с эмпирическими условиями, то это не следствие ее внутренних свойств, а лишь внешних обстоятельств. Обнаружилось, что относительно простая наука в состоянии объяснить явления природы. Это счастливая случайность, которая не должна была с необходимостью наступить»[2]. Но этого мало. В вейлевском обосновании математики в противоположность рёсселевскому неподвижному бытию весьма привлекательным казалось интуиционистское становление, некоторые антидиалектические черты которого нами уже были впрочем выяснены. Насколько на самом деле не реальный, чисто субъективный характер оно однако носит, видно хотя бы из такого утверждения Вейля: «Объективный мир просто есть, он не происходит. Лишь перед взглядом взбирающегося по мировой линии моего тела сознания «возникает» сечение этого мира,

[1] Наличие у Гельмгольца подобных мест (наряду с теорией ощущений не как образов, а лишь произвольных знаков, символов вещей, представляющей собою кантианский отрыв «явления» от «вещи в себе») и побудило Ленина сказать однажды, что «агностицизм Гельмгольца тоже похож на «стыдливый материализм», с кантианскими выпадами в отличие от берклианских выпадов Гекели».

[2] Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker, S. 178.

и проходит перед ним как пространственная, охваченная временным изменением, картина».

Перед философией математики, как уже было указано, стоят два основных, неразрывно друг с другом связанных вопроса: вопрос об отношении математических абстракций к действительности и вопрос о закономерностях развития самой математики — ее понятий, положений, дисциплин и наконец математики как целого. «Логисты», как мы видели, дали на оба эти вопроса метафизический, неправильный, односторонний и недостаточный ответ. Интуиционисты на первый из них просто не сумели ответить. Ответили ли они хотя бы на второй? Кажется почти самоочевидным, что, стоя на точке зрения интуиции как особой, сверхчувственной и доразумной, не подчиняющейся логическим закономерностям способности нашего «духа», на него и нельзя ответить. И действительно вопрос о закономерностях развития самой математики, о ее будущем, представляет для всех интуиционистов,— впрочем и тут противоположности сходятся: не только для интуиционистов, но и для логистов, — неизмеримые трудности. Ограничусь только несколькими свидетельствами. В случае надобности число их может быть почти неограниченно увеличено. Мы уже видели, что для Вейля отдельные последовательности «разворачиваются в лишенном закономерности процессе, которому мы должны слепо довериться, чтобы узнать, что он порождает от шага к шагу», что с его точки зрения нельзя утверждать или предвидеть существование чего-либо еще не «построенного».

Лишь после того, как построение удалось, разрешается констатировать его удачу. Для Вейля математика «не неподвижная или вносящая неподвижность схема», она сама находится в вечном изменении и становлении. Как однако оно происходит? — Путем «творческого» «построения» н о в ы х «идеальных» объектов, отчасти совершенно «свободного», отчасти связанного (повидимому, говоря о «связанности», Вейль подразумевает все тот же принцип полной математической индукции, который, «не сведенный к какой-нибудь формуле, но конкретно шаг за шагом примененный, является для него основой и единственной силой математики—математической первоинтуицией»). Ясно, что об осознании з а к о н о м е р н о с т е й развития математики при этом вряд ли может итти речь.

Сходную с этим — если не еще более резко отвергающую всякую закономерность в развитии математики—точку зрения отстаивает Пуанкаре. «Математик, — пишет он в статье о «Будущем математики», — не может как попало сохранять все встретившиеся ему факты; к тому же еще эти факты творит он сам, или, скажем иначе, их творит его каприз. Это он строит из всех частей новую комбинацию, соединяя те или другие элементы». Если «каприз математика» творит новые факты, то, понятно, не о закономерностях их возникновения и развития при этом может итти речь. Но, быть может, подчиняется каким-нибудь, хотя бы более или менее общим, закономерностям их приведение в систему? Общеизвестно, что для Пуанкаре приведение в систему преследовало раньше всего совершенно в н е ш н и е для материала экономические цели. Ясное дело,

что в силу их внешности не мог даже быть поставлен вопрос о внутренних закономерностях развития математики как целого. И действительно для Пуанкаре это установление связей, которое выражается в приведении в систему, зависит от удачно выбранного *нового слова*. «Трудно поверить, — пишет он, — как много может одно хорошо выбранное слово «экономизировать мысль», выражаясь словами Маха. Не знаю, не говорил ли я уже где-нибудь, что математика есть искусство называть одним и тем же именем различные вещи». «Счастливое нововведение в языке», «слово, которое творит закон, элиминируя исключения» — вот то, что заменяет развитие понятий и положений математики у Пуанкаре.

Для интуициониста Бутру также не существует закономерного развития математики, определяющих направлений или тенденций в нем. «После того, — пишет он, — как с XVI или XV в деятельность математика в основном была строящей и обобщающей, теперь математик превратился в некоторого рода химика, анализирующего чуждую, бесконечно сложную материю. Его можно было бы также назвать исследователем-путешественником, который старается ориентироваться в неизвестной части земли, который хочет найти свои богатства, свои «интересные» страны, *не догадываясь впрочем о том, в каком направлении он должен производить свои исследовательские испытания*, чтобы достигнуть цели»[1].

Приводя слова Бореля, стоящего на той же точке зрения случайности и бесперспективности развития математики, Бутру замечает: «В действительности математик не знает никакого принципа, никакого объективного критерия, который дал бы ему возможность решить, стоит ли некоторая теория тех трудов, которые он полагает на ее установление. Он должен таким образом, давая определенное направление своей активности, положиться на свое чутье, на свое вдохновение и надеяться, что оно откроет ему новые пути[2]. Ибо Борель написал вот что: «Что нам нужно, — это счастливая идея, введение понятия, дающего возможность сгруппировать известные факты и вывести затем из них новые... Собственная, действительно плодотворная способность открытия в математике, как и во всех других науках, состоит в том, чтобы открыть какую-нибудь новую точку зрения, дающую возможность классифицировать и интерпретировать факты».

К чести интуиционистов, повторяю, нужно сказать, что, как мы видели, в весьма энергичных выражениях свидетельствовавший свое непочтение к интуиции Рёссель в конце концов вынужден стать в этом вопросе на ту же точку зрения. Ибо в действительности математика не развивается механически, ибо закономерности ее развития диалектические, т. е. содержательные, а не формальные, связывающие ее с внешним миром, а не отрывающие от него, и с метафизической точки зрения осознать их никак невозможно. «Противоположность между

[1] Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker, S. 188 (подчеркнуто мною — *С. Я.*).
[2] Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker, S. 171.

воззрением и разумом,— пишет Рёссель,—в действительности покоится главным образом на самообмане. Непосредственное воззрение, или, по Бергсону, интуиция, правда, пробуждает в нас убеждения, которые затем на основе разумного рассмотрения либо подтверждаются, либо отбрасываются, но это подтверждение, там где оно вообще возможно, получается также лишь через согласование с другими убеждениями, которые в конечном счете добыты столь же инстинктивно. Разуму принадлежит скорее оценивающая и выравнивающая, чем творческая функция: напротив, интуиция есть то, что — даже в самой области чистой логики — открывает новое». Итак, после того как новое открыто, Рёссель обещает уложить его на прокрустово ложе своей метафизической системы, но не ищите в закономерностях ее построения — формальном логистическом исчислении — каких-либо указаний на предмет открытия новых истин. Тут совершенно так же, как и у интуиционистов, властвуют стихия и инстинкт.

Как же обстоит тут дело с точки зрения философии диалектического материализма? Как она отвечает на оба основных, с ее точки зрения неразрывно друг с другом связанных, вопроса философии математики—вопрос об отношении математики к действительности и вопрос о закономерностях построения и развития самой математики как не простого собрания задач и формул, а цельной и развивающейся с и с т е м ы?

Диалектический материализм прежде всего материализм. Человеческое познание, с его точки зрения, отражает реальные связи и закономерности м а т е р и а л ь н о г о, т. е. независимого ни от человеческого, ни от какого иного мышления, внешнего мира. Математика, как часть этого познания, имеет следовательно своим предметом все ту же независимую от человеческого мышления реальную, материальную действительность. Что же именно в этой действительности она изучает? В чем ее специфическое отличие от других наук, тоже изучающих все тот же внешний мир?

По Гегелю, математика есть наука о количестве. Если под количеством понимать только число, то пожалуй это будет неверно. Но для Гегеля к о л и ч е с т в о это «внешняя» и «безразличная» определенность. Если к а ч е с т в о есть определенность, неотделимая от предмета, делающая его тем, что он есть, именно д а н н ы м предметом, то количественная определенность в н е ш н я я и б е з р а з л и ч н а предмету, так что с изменением ее предмет не перестает быть тем, что он есть. Материалистически истолковывая и развивая далее эту точку зрения, можно сказать, что предметом математики являются такие отношения материальной действительности, которые в силу своих «внешности» и «безразличия» допускают, вообще говоря, некоторое множество «интерпретаций». Так «прямую» или «точку» математик действительно интерпретирует весьма многообразными способами, в то время как физический «атом», во всех своих изменениях сохраняет ту качественную определенность, которая характерна для него именно как для атома, а не чего-нибудь качественно от него отличного. Что же это за «внешние» и «безразличные» отношения однако?

С наиболее «внешними» и «безразличными» отношениями между вещами человек сталкивается на первых ступенях своей практической деятельности, когда он действует еще в достаточной мере стереотипно, не умея вскрыть и использовать специфические, конкретные особенности окружающей его обстановки. Это—отношения внешнего соединения и разделения, множества к его элементу (внешнего совокупления), включения и выключения, комбинаторики, наконец численности в отношении к сосчитываемым предметам. «Сущность» предметов, внутренняя их структура, взаимные связи и отношения при этом совсем не входят в рассмотрение, и не удивительно поэтому, что в теории множеств может итти речь о множестве трех предметов, состоящем из апельсина, луны и идеи.

На этой ступени своего развития математика неотделима от формальной логики, ибо последняя изучает именно такие абстрактные, формальные, т. е. не зависящие от какого-нибудь определенного содержания, связи и отношения. Неудивительно поэтому, что в свою очередь такая формальная логика хорошо допускает математическую (символическую) интерпретацию, сама оказываясь лишь некоторым видом арифметики.

Так как содержание предмета при этом почти не входит в рассмотрение, то предмет выступает лишь как символ. В отличие от копии, зеркального изображения, символ не отображает, а замещает предмет. Так пастуху, замещающему своих коров камешками и оперирующему ими как «символами» этих предметов, располагая их в группы, подсчитывая и т. п., вряд ли придет в голову «вычитать» природу коровы из рассмотрения камешка. Характерными чертами символа являются его неизменность, тождественность самому себе, с одной стороны, абсолютное отличие от прочих символов, с другой,— его абстрактный, формальный характер, т. е. способность «замещать» любое конкретное содержание и следовательно отсутствие в нем внутренней структуры, нерасчлененность. В отношении к символам таким образом вполне применима обычная формальная логика с ее законами тождества, противоречия и исключенного третьего.

Однако все это справедливо все же лишь в абстракции. Ибо даже при помощи камешков пастух не только замещает своих коров, но и отражает некоторые реальные связи между ними. Для диалектического материализма в отличие от материализма метафизического нет непроходимой пропасти между «внешним» и «внутренним», «явлением» и «сущностью». Познавая внешние проявления вещей, отношения их к другим вещам — в том числе и к нашему воспринимающему аппарату, к нашим органам чувств,— мы познаем самые вещи. Как геометр изучает инвариантные свойства кривой, относя ее к некоторой произвольной системе координат, которую затем определенным образом изменяет, именно в этом изменении обнаруживая не зависящие от нее, абсолютные, так сказать, свойства кривой, так и человек, в своей практической деятельности, изменяя свое отношение

к вещам, отношение вещей к себе и друг к другу, познает инвариантные, не зависящие от его «я», свойства вещей.

Для диалектического материализма критерий практики находится поэтому не вне (как у позитивистов и прагматистов), а внутри теории познания. Именно это и дает диалектическому материализму возможность не отрывать метафизически вещи от отношений между ними, а, познавая отношения между вещами в их изменении, изменяя отношения между ними и той специальной «системой координат», в показаниях которой они нам даны, познавать вещи, как они есть, независимо от нашего воспринимающего аппарата. Познать формы движения (изменения) вещи, ее связи, отношения к другим вещам это и значит познать самое вещь.

Отсутствие критерия практики внутри теории познания, метафизический отрыв «вещи» от «отношения», «явления» от «сущности» — вот общие и логистам и интуиционистам предпосылки теории познания, приведшие их к полному отрыву математики от реальной, независимой от нашего «я» действительности, вынудившие Рёсселя создать особый мир платоновских «идей» (универсалий), в который он и поместил отношения, оторвавши их от вещей, вынудившие интуиционистов, не удовлетворившихся этим исходом, перенести этот особый мир в субъект, призвав «случай» или «боженьку» для объяснения соответствия между математикой и действительностью. Только материализм — и притом, как мы видели, не механический, метафизический, а диалектический материализм, не отрывающий теорию от практики, вещь от отношения, сущность от явления, форму от содержания, а через отношение, явление, форму познающий, при помощи критерия практики, вещь, сущность, содержание,— дает таким образом возможность ответить на общий для всей науки вопрос о соответствии ее с действительностью.

Однако соответствие это не устанавливается механически, само собой, помимо активного участия сознания человека. Мостом между внешним миром и мышлением человека служат ощущения, которые диалектический материализм рассматривает не как «символы», знаки, лишь замещающие, а не отражающие вещь, а именно как ее отражения. Ибо, изучая свои ощущения в процессе их изменения, активного воздействия на природу и природы на нас, человек действительно изучает природу тех вещей и отношений, с которыми ему приходится сталкиваться, «вычитать» же природу вещи из лишь заменяющего, а не отражающего ее, символа нельзя. Будучи отражениями, а не символами вещей, ощущения таким образом конкретны. Но в этой конкретности истина, т. е. соответствие мышления объекту, еще не дана непосредственно. Над ощущениями еще нужно поработать, их материал нужно подвергнуть глубокой и тщательной обработке, чтобы познать действительность в ее подлинной конкретности, чтобы от той конкретности, в которой она нам является, перейти к такой, в какой она есть сама по себе, во всем своем многообразии, полноте, связях и изменении. Результатом этой сознательной обработки ощущений при помощи и через по-

средство критерия практики и служат понятия. Но так как истина конкретна, конкретным должно быть и отражающее ее понятие.

Способом, при помощи которого мышление усваивает себе конкретное, воспроизводит его духовно как конкретное, является путь от чувственно конкретного к абстрактному, а далее путь р а з в и т и я из по началу бедных содержанием абстракций, путь восхождения от простейшего. Конкретное потому конкретно, пишет Маркс, что оно заключает в себе множество определений, являясь единством в многообразии. В мышлении оно поэтому выступает как процесс соединения, как результат, а не как исходный пункт, хотя оно является исходным пунктом в действительности.

Ни для логиста, ни для интуициониста этого процесса конкретизации понятия нет, бедный содержанием «символ» не может поэтому в процессе развития, установления связей и отношений наполниться конкретным содержанием. Он либо с самого начала уже конкретен и индивидуален, но тогда он дан путем «откровения», в интуиции, либо так и вынужден на век оставаться пустой и голой абстракцией. Что в процессе своего развития ч и с л о например все больше и больше конкретизируется, ибо все лучше и лучше отражает сложные отношения материальной действительности, что тому же самому процессу изменения и развития подвергается в действительности любое понятие математики, что именно в этом процессе происходит наполнение его содержанием, его конкретизация — этого не замечают ни логисты, ни интуиционисты. «Прыжок в трансцендентное», выход за пределы нашего «я», по Вейлю, и возможен поэтому лишь при условии, что мы удовлетворимся символом, т. е. откажемся от отражения внешнего мира в наших понятиях и займемся «конструкцией» его из голых и бессодержательных символов.

Однако первым шагом к конкретизации понятий является уже простое приведение их в связь, установление между ними отношений, выражающихся в суждениях, отражающих реальные связи и отношения материальной действительности. Не отдельное понятие, а лишь с и с т е м а суждений как ц е л о е, в которой все части связаны друг с другом, может служить выражением для истины. Однако, повторяю, уже простое установление отношений между понятиями изменяет самые понятия. Так натуральное число, по началу, пока еще не установлены операции над числами, очень бедная содержанием абстракция — знак, символ, абсолютно тождественный и абсолютно отличный от других знаков того же рода. Но установление основных арифметических операций между числами вносит различия в их среду,— каждое отдельное число приобретает свою особую качественную физиономию, становится индивидуумом с множеством своеобразных свойств, обогащается содержанием, конкретизируется. Известно, что Клейн объяснял многие арифметические открытия Гаусса именно его хорошим, еще с детства приобретенным знакомством с индивидуальными особенностями значительного числа натуральных чисел. Индивидуальный характер каждого отдельного числа подчеркивают также (об этом уже было упомянуто) и интуиционисты, начиная с Пуанкаре. Но для них он является мистической тайной, ибо индивидуумом каждое

число считается с самого начала, еще до установления каких бы то ни было операций или отношений между числами. В действительности индивидуумом число является лишь внутри целого, лишь в системе, где установлены связи, отношения между числами.

Но этого еще не достаточно. Неподвижная система, даже как целое, не в состоянии отобразить живую изменяющуюся действительность. Чтобы этого достичь, ее понятия и отношения сами должны быть подвижными, изменяющимися, и притом по тому же основному закону, по которому происходит всякое изменение, развитие, движение в природе. Закон единства противоположностей и является этим основным законом с точки зрения диалектического материализма. Именно он и дает ключ к выходу из того противоположения, в котором застряли «аналитики»-логисты, с одной стороны, и «синтетики»-интуиционисты, с другой. Этот ключ состоит в единстве анализа и синтеза. Аналитическая точка зрения на строение и развитие науки подчеркивает в ней момент тождества, сведения всякого нового к старому; чисто синтетическая — момент различия, образования существенно, специфически нового, несводимого к старому. Математика, с точки зрения Рёсселя, начисто сводится к формальной логике. Математика, с точки зрения интуиционизма, не может быть сведена к формальной логике, требуется еще абсолютно новая, совершенно отличная от логики, интуиция, в которой только и обоснованы основные понятия математики. Диалектический материализм не стоит ни за абсолютную сводимость, ни за абсолютную несводимость. Он стоит на точке зрения развития, а развитие есть единство тождества и различия, ибо развившееся и тождественно и отлично от того, из чего оно развилось, ибо развившееся есть новое, развившееся из старого[1]. Математика, я уже говорила об этом, на первых ступенях своего развития сливается с формальной логикой; там, где речь идет еще об очень абстрактных и «внешних» отношениях, там, где ее понятия еще очень мало отличаются от «символов». Но лишь на первых ступенях. Ибо уже с арифметикой бесконечного ряда натуральных чисел формальная логика не может справиться. Это — задача диалектической, содержательной логики, изучающей общие законы всякого развития и движения в природе, обществе и в мышлении. Не в интуиции, а в раскрытии и изучении диалектических закономерностей развития и изменения понятий и положений математики, и лежит поэтому путь к пониманию того существенно нового, что является специфическим для математики как науки о бесконечности.

---

[1] Если механисты делают односторонне ударение на тождественности нового (развившегося) со старым, из которого оно развилось, то представители меньшевиствующего идеализма деборинской «школы» не менее односторонне подчеркивают именно специфичность нового. Подлинного единства анализа и синтеза, подлинной точки зрения развития нет таким образом ни у тех, ни у других.

Развивающиеся по закону единства противоположностей, при помощи и через посредство критерия практики, понятия математики все лучше и лучше отражают в этом развитии явления материальной действительности. Развитие понятия о числе, об интеграле, развитие геометрии вплоть до слияния ее с физикой в теории относительности, развитие любого математического понятия, аксиомы, дисциплины в конце концов дают нам поучительные примеры этого. Обосновать математику — это значит на самом деле осознать закономерности ее изменения и развития, начиная с простых, весьма бедных содержанием абстракций.

Но тут нужно сделать одно, чрезвычайно существенное замечание. Диалектическая логика — не формальная, а содержательная логика. Поэтому ее законы не пустые схемы, которые могут быть приложены к любому содержанию и по которым можно, запершись где-нибудь в кабинете, изолируясь от практики, «развивать» понятия. Нет, это развитие происходит лишь исторически, под влиянием развития производительных сил общества, влиянием до настоящего времени хотя и стихийным, но все же неуклонно, прямо или косвенно, через другие науки, осуществлявшимся. Логическое поэтому, с точки зрения диалектического материализма, и есть не что иное, как переработанное и приведенное в систему историческое. «Развитие например какого-нибудь понятия или отношения в истории мышления, — пишет Энгельс, — относится к развитию его в голове отдельного диалектика, как развитие какого-нибудь организма в палеонтологии — к развитию его в эмбриологии (или, скорее, в истории и в отдельном зародыше)... В историческом развитии случайность играет свою роль, которая в диалектическом мышлении, как и в развитии зародыша, выражается в необходимости». Обосновать математику — это значит таким образом перестроить ее так, чтобы в ней логическое было в подлинном единстве с историческим, подобно тому, как это было сделано Марксом для политической экономии.

Как однако происходит это превращение случайностей исторического развития, о котором говорит Энгельс, в логическую необходимость? Как обстоит например дело с аксиомами евклидовой геометрии, носящими по началу именно такой «случайный» характер?

Дело в том, что, с точки зрения диалектического материализма, наука, развивающаяся и обогащающая свои понятия новым содержанием, все более и более конкретным, т. е. правильно отражающим реальную сложность и связность вещей между собой, самым этим своим движением вперед определяет и обосновывает первоначально неопределенное начало. Как с точки зрения бинома Ньютона выясняется роль и смысл формул для квадрата и куба суммы, так и с точки зрения современной римановой диференциальной геометрии ясны роль, смысл и значение геометрии Евклида. Наука с точки зрения диалектического материализма есть не просто раз навсегда данная «прямолинейная» система, — она представляет собой круг, ибо каждый шаг ее движения вперед есть возвращение и обоснование начала. Более того — она есть круг из кругов, ибо это возвращение назад происходит именно на каждом шагу. Но это зна-

чит также, что математику никак нельзя обосновать *извне*, из одних только общих, хотя бы и диалектических, соображений, не конкретизированных в виде специфических, именно ей присущих, закономерностей.

Все это однако лишь самые общие и уже в силу этого недостаточные соображения. Их конкретизация в применении к математике по существу еще впереди. Мне хотелось здесь, напомнив некоторые основные положения философии диалектического материализма, созданной Марксом, Энгельсом и Лениным, лишь наметить ту отправную точку зрения, из которой следует исходить в критике современной нам идеалистической философии математики.

Для диалектического материалиста, — позволю себе повторить это, подводя итоги, — математика есть целостная, развивающаяся, и при том по диалектическому закону единства противоположностей, наука, все лучше и лучше, все конкретнее и содержательнее отображающая при этом закономерности реальной материальной действительности. Подобно всем другим наукам, она представляет собою в своем развитии «круг из кругов», конец которого возвращается в начало, обогащая и обосновывая последнее. Логическое построение ее как целостной системы отражает при этом, в общем и целом, в основном, исторически пройденный ею путь, пройденный под *стихийным*, неосознанным влиянием человеческой практики — техники, естествознания. Эту стихийность, случайный характер развития математики современные философы математики хотят возвести в принцип, увековечить, прикрывшись «красивой» и «демократической» формулой пресловутой ее «свободы». «Можно ли требовать,— пишет Пуанкаре,— чтобы мы, чистые математики, довольствовались только ожиданием заказов со стороны, вместо того чтобы работать над наукой ради собственного удовольствия, можно ли требовать, чтобы мы только и приспособлялись к вкусу наших клиентов?». «Раньше всего,— сообщает по поводу математики бергсонианец Ж. Пакотт,— она повсюду утверждает свободу своих поступков. Число — это мир, в котором наш ум воздвигает свои архитектурные сооружения по своим декретам и фантазии». Но разве простое выполнение поступающих со стороны заказов есть подлинное осознание закономерностей своего развития, своей связи с внешним миром? И разве есть иная свобода кроме осознанной необходимости?

«Все существовавшие доныне способы производства, — говорит Энгельс,— стремились только к получению от процесса труда непосредственных полезных эффектов. Дальнейшие — выявляющиеся более поздно и благодаря повторению и накоплению приобретающие решающее значение — последствия совершенно игнорируются.

... Наиболее ярко это сказывается в господствующем ныне в Европе капиталистическом способе производства. Отдельные господствующие над производством и обменом капиталисты могут заботиться лишь о непосредственных полезных эффектах своих действий». И, смею вас уверить, это именно они были бы очень довольны, если бы математики, отнюдь не размышляя над тяжелыми проблемами единства теории и практики, послушно и непосредственно давали бы им

ответ на выдвигаемые техникой запросы. Они готовы были бы на таких условиях субсидировать попутно и «чистую» математику довольно значительными средствами, хорошо зная, что в действительности самая «чистая» теория все же не отделима от практики, по крайней мере поскольку она еще остается научной. Да, фактически это они и делают. Да, фактически именно это положение и хотят увековечить столь энергично ратующие за «демократическую свободу» математики и философы математики. Нет, речь идет о подлинном осознании закономерностей развития математики, о превращении ее из науки, развивающейся лишь стихийно под влиянием потребностей практики, техники, естествознания, внутренней логики своего развития наконец, которой, к слову сказать, отнюдь не отрицает диалектический материализм, — в науку плановую, сознательно ставящую перед собой задачу единства теории и практики, сознательно выдвигающую при этом на первый план в качестве того решающего, определяющего звена, за которое в данных условиях нужно ухватиться, актуальные проблемы практики социалистического строительства.

Ибо в действительности именно в отрыве теории от практики и состоит переживаемый сейчас математикою кризис. Парадоксы теории множеств и затруднения, связанные с законом исключенного третьего, служат лишь выразителями полной беспомощности всякой попытки внешнего, формального, раз навсегда данного обоснования математики вне зависимости от конкретного содержания выдвигаемых перед нею практикой задач. «Теория становится беспредметной — пишет тов. Сталин, — если она не связывается с революционной практикой, точно так же, как и практика становится слепой, если она на освещает себе дорогу революционной теорией».

В обществе, построенном на классовой борьбе, нет и не может быть внеклассовой, беспартийной науки. Процесс дальнейшего загнивания капитализма наряду с победоносным строительством социализма в СССР отражается и на математике, создавая в ней кризисы, обусловленные отрывом теории от практики, все более и более последовательно идеалистическими методологическими установками буржуазных математиков. Этой буржуазной партийности мы должны противопоставить свою действенную большевистскую партийность. Выход из кризиса возможен лишь на основе единства теории и практики социалистического строительства, лишь под непосредственным идейно-политическим и теоретическим руководством со стороны коммунистической партии и ее руководящего штаба.

Подводя окончательный итог нашим попыткам сформулировать, в чем должно состоять диалектико-материалистическое «обоснование» математики, мы должны сказать:

«Обосновать» математику — это значит переделать ее на основе теоретического осознания и предвидения стоящих перед практикою социалистического строительства задач, на основе подлинного внедрения в ней большевистской, действенной партийности.

Орудием этого осознания и переделки может служить при этом лишь та философия, которая правильно отражает общие законы всякого развития и движения в природе, обществе, а следовательно и науке,— философия диалектического материализма.

Задача этой переделки однако лишь поставлена перед нами.

Решить ее одному человеку, даже отдельной группе математиков или философов, не под силу. Ее должен сознательно поставить перед собою наш съезд, обеспечив возможность коллективной работы над ее решением — на основе подлинного осуществления генеральной линии партии — математиков, философов, физиков, химиков, статистиков, экономистов, инженеров и решительно связав ее с проблемой подготовки новых кадров, проникнутых пролетарской идеологией, основанной на философии диалектического материализма.

В. Молодший

К КРИТИКЕ УЧЕНИЙ БОЛЬЦАНО И КАНТОРА ОБ АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНОМ[1]

Наиболее «модным» и «современным» направлением философии математики является интуиционизм, формально противополагающий себя рёсселевской логистике и гильбертову формализму, но фактически — в основном — с ним единый. В то же время математика перерастает рамки формализма и интуиционизма, ставя вопрос как о кризисе основ математики, так и о необходимости критики интуиционизма и формализма. Поэтому критиковать интуиционизм надо не непосредственно, а в связи с формализмом. И так как последний хронологически предшествует ему, имея началом исследования Больцано и Кантора, то критика интуиционизма должна начаться с анализа учений этих мыслителей.

Предлагаемая вниманию читателя статья не претендует дать исчерпывающую критику учениям Больцано и Кантора. Ее цель — выявить существенное в этих учениях, с чего, по существу, должна начаться эта критика.

Когда в XVII в. на смену феодальной формации пришел буржуазный строй, его победоносное шествие вызвало бурное развитие научного знания. Механика, физика, астрономия открыли небывалые горизонты, заставляя верить в великую творческую деятельность человечества и все глубже направлять взор на исследование тайн природы. Если взять основное в этом великом перевороте, то его содержание можно выразить немногими словами — *естествознание эпохи Возрождения занималось преимущественно исследованием форм механического движения*. Однако этого было уже достаточно и для того, чтобы математика, в свою очередь, получила могучий импульс к дальнейшему развитию, так как доставшаяся в наследство эпохе Возрождения математика греков, преимущественно математика постоянных величин, была не приспособлена к количественному анализу форм механического движения. То, что раньше было чуждым математике — переменные величины — становится объектом исследования математики, одновременно с этим перерастая в метод исследова-

---

[1] Доложено в семинарии по критике буржуазной философии математики при математической секции Комм. академии осенью 1930 г.

ния. При рассмотрении содержания переменных величин математическая мысль XVII в. пошла по двум направлениям. В 1615 г. вышла в свет работа Кеплера «Nova Stereometria doliorum», в основном посвященная определению объемов тел вращения. Исходя от методов Архимеда, Кеплер дает в ней изложение приемов, помощью которых можно определять объем тел вращения, площади фигур и т. п. Его работа важна для нас тем, что в ней впервые после Архимеда возродилось представление об актуально бесконечном. Так, определяя площадь круга, Кеплер представляет ее в виде суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых, определенных, ставших, треугольников, вершины которых совпадают в центре круга. Но то, что у Кеплера было выражено в зачаточной форме, находится в развернутом виде в сочинении Кавальери: «Geometria Indivisibilis continuorum nova quadamratione promota». В нем Кавальери рассматривает линии как совокупности бесконечного числа точек, площади — как совокупности параллельных прямолинейных отрезков, тела — как совокупности плоских параллельных сечений. При этом данные элементы: точки, полоски и элементарные объемы, — мыслятся Кавальери как бесконечно-малые — неделимые, т. е. как ставшие. Весь процесс вычисления площадей и объемов фигур Кавальери проводит на основе сравнения неделимых этих фигур. Так, при определении площадей, он исходит из предположения, что площади двух фигур относятся между собой, как соответствующие им неделимые. Вообще, общая методологическая предпосылка учения Кавальери выражена в сведении непрерывного к дискретному и в том положении, что отношение непрерывных объектов пропорционально отношению дискретных (неделимых) величин.

Таково было первое направление в рассмотрении бесконечно-малого. Бесконечно-малое рассматривалось как неделимое, ставшее, а всякий геометрический образ представлял собою бесконечную совокупность этих неделимых.

Чтобы понять теперь, почему в XVII в. это направление не получило дальнейшего развития, мы должны будем несколько подробнее рассмотреть те требования, которые в то время предъявлялись математике со стороны механики, астрономии и физики.

Представим себе, что необходимо исследовать скорость движения материальной точки по некоторой траектории. Если эта точка движется равномерно, то постоянное отношение $\frac{s}{t}$ дает нам искомую скорость. Совсем иная картина получится, если точка движется неравномерно. Тогда $\frac{s}{t}$ уже не будет постоянной величиной. Чтобы все же решить поставленную задачу, мы должны будем взять среднюю скорость $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ и, приближая t_2 к t_1, рассматривать скорость точки в момент t_1 как предел, к которому стремится отношение $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ при приближении

t_2 к t_1. Поступая так, мы вынуждены ввести понятие переменной величины вообще, и бесконечно-малой в частности, т. е. рассматривать искомую скорость не как неделимое, ставшее, а, наоборот, как момент переменного, становящегося.

Число подобного рода задач, естественно, может быть увеличено. Именно ими и интересовалось естествознание эпохи Возрождения, вынуждая тем самым математику на исследование переменных величин вообще. Конечно математика не сразу подошла к исследованию переменных величин. Этому предшествовал ряд открытий в области алгебры и геометрии, которые создали базу для введения в математику понятия переменной величины. Последняя впервые появилась в аналитической геометрии Декарта, но в законченном для того времени виде учение о переменных величинах выступило в разработанных Лейбницем и Ньютоном диференциальном и интегральном исчислениях.

Основными среди новых проблем были: задача о построении касательной к кривой, которая сводилась к отысканию предельного значения отношения двух бесконечно-малых величин, и задача о суммировании бесконечно-большого числа бесконечно-малых величин (квадратура). До Ньютона и Лейбница не видели единства этих двух задач. Заслуга Лейбница и Ньютона заключается в том, что, дав синтез методов их предшественников и решив помощью разработанного ими общего метода эти задачи, они показали, что между ними существует органическая связь, но разрешение этих задач помощью единого метода давало механике, физике и астрономии тот математический аппарат, в котором они так нуждались.

Таким образом второе направление рассматривало бесконечно-малое не как неделимое, а, наоборот, вынуждено было видеть в нем нечто переменное, становящееся[1].

Как известно, для Лейбница отправной точкой исследования служила задача об отыскании касательных, в то время как Ньютон преимущественно исходил от квадратуры плоских кривых. Но как в том, так и в другом случае задача получала смысл при заданном уравнении кривой $y=f(x)$. Поэтому естественно сперва было обратить внимание на изучение свойств самих функций, уже от них отправляться к поставленным выше задачам. Рассмотрев целую алгебраическую функцию $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ и выявив ее свойства, основоположники анализа поставили себе целью так или иначе свести остальные функции к целой алгебраической, так как это, во-первых, упрощало решение проблем диференциального и интегрального исчислений, а во-вторых, да-

[1] Однако строго разграничивать направления в понимании бесконечно-малого совершенно не приходится. Во-первых, потому, что первое из них хронологически предшествовало второму, создало ему базу, а во-вторых, в самом втором направлении нельзя найти более или менее отчетливого разграничения понятий актуально бесконечного и потенциально бесконечного. Их можно разграничивать условно, указывая, что в первом направлении доминировал взгляд на бесконечно-малое как на актуально бесконечное, в то время как согласно второму бесконечно-малое было преимущественно потенциально бесконечным.

вало способ аппроксимации любых функций, что в связи с требованиями естествознания было особенно важным. Подобное сведение им удалось выполнить помощью разложения функций в ряды, но не полностью, так как в разложениях участвовало бесконечно-большое число членов. Так например Ньютон нашел известные разложения функций $(a+x)^n$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, Лейбниц дал ряд других, не менее важных, разложений. Но то, что дали Ньютон и Лейбниц, страдало одним недостатком: найденные ими разложения не были достигнуты помощью единых методов. В основном эта задача была решена в первой половине XVIII в., когда впервые была найдена строка Тэйлора-Маклорена. Но, по мере того как росло и ширилось учение о бесконечных рядах, как расширялось поле его приложений, в нем возник ряд внутренних противоречий. Во-первых, было обнаружено, что не все функции могут быть разложены в бесконечные ряды. Во-вторых, хотела ли того математическая мысль или не хотела, но, следуя методологическим установкам Ньютона и Лейбница, она должна была стремиться к полному сведению функций к целым алгебраическим функциям, через их разложение в бесконечные ряды. Подобное стремление означало необходимость рассматривать бесконечные ряды как простые алгебраические суммы и, в конечном счете, постулировать в отношении к ним полную приложимость законов конечных величин[1]. Иначе говоря, в процессе познания бесконечных рядов математическая мысль XVIII столетия остановилась на выяснении сходства между бесконечными рядами и целой алгебраической функцией, не поднявшись до осознания их различия. Эта неполнота познания дала себя скоро почувствовать. Например было замечено, что суммы некоторых бесконечных рядов зависят от порядка следования элементов, что вообще действия, как то: группировка, разложение и т. д., в приложении к бесконечным рядам подчас приводят к совершенно парадоксальным результатам. Пока число подобного рода парадоксов было ограничено, математика не делала особых попыток к их преодолению. Но по мере его роста перед математикой встала необходимость выяснить то существенное, что характеризовало бесконечные ряды, т. е. возникла потребность разграничить понятие целой алгебраической функции от бесконечных рядов. Кроме того на путь этого разграничения математика вынуждена была пойти в силу существования не менее важного противоречия между метафизическим мышлением и методологическими основами анализа.

«Что особенно характеризует рассматриваемый период (т. е. эпоху Возрождения—*В. М.*), так это — образование известного цельного мировоззрения, центром которого является учение об абсолютной

[1] Б. Риман, О возможности выражения функции при помощи тригонометрического ряда.

неизменности природы» [1]. Согласно этому мировоззрению мир представлялся неизменным, от века данным, или имел постоянное лицо от сотворения мира. Считалось, что звезды всегда находились, в силу тяготения, на определенных расстояниях, солнечная система была неизменной от первого толчка, видов было столько, сколько их создал бог. Методологическая основа этого мировоззрения была выражена формальной логикой, основной принцип которой гласит: «На каждый вполне определенный — и понимаемый именно в этом вполне определенном смысле — вопрос о принадлежности данному предмету данного свойства надо отвечать: или да, или нет, и нельзя отвечать: и да, и нет» [2]. Но если естествознание того времени долго руководствовалось такими методологическими предпосылками, чтобы впервые отказаться от них в 1755 г. — в год выхода в свет работы Канта: «Всеобщая естественная история и теория неба», то естественно, что эта методологическая установка не была чуждой философии того времени. Поэтому, когда был открыт анализ и начали обрисовываться его методологические предпосылки, которые, как известно, не укладывались в рамки формальной логики, так как они противоречили закону тождества,— метафизическая философия открыла огонь против анализа.

Первым серьезным противником анализа был Д. Беркли. Как известно, при построении своей философии Д. Беркли задавался целью побороть атеистическое мировоззрение. Он прямо говорил о своей цели, причем отмечал, что успешный разгром атеистов мыслим только помощью отказа от представления о материи, как субстанции, лежащей вне нашего сознания. «Единственная вещь»—говорит Д. Беркли,— существование которой мы отрицаем, есть то, что философы называют материею или телесной субстанцией» [3]. Быть — значит быть, быть в восприятии (esse — percipi). Но раз это так, то очевидно не могут также существовать отвлеченные идеи, ибо понятие «отвлеченный» предполагает наличие «нечто», от чего отвлекаются, а подобного «нечто» вне нас не существует. Исходя из подобных предпосылок, Д. Беркли анализирует и математику. Он устанавливает, что «в арифметике мы рассматриваем не вещи, а знаки, которые однако подвергаются исследованию не ради их самих, но потому, что они показывают нам, как следует поступать относительно вещей и правильно ими распоряжаться» [4]. Как видим, Д. Беркли довольно «миролюбиво» настроен по отношению к арифметике. Но когда Д. Беркли подходит к рассмотрению анализа, картина резко меняется. «Мы, — говорит Д. Беркли, — предполагаем, что математики не менее глубоко, чем другие люди, погружены в заблуждения, вытекающие из учения об общих отвлеченных идеях и о существовании предметов вне духа» [5]. Математики признают безграничную делимость материи (становящееся бесконечно-малым), но это — глубокое заблуждение, вытекающее из приз-

[1] Энгельс, Диалектика природы, 2-е изд., стр. 111.
[2] Правило Ибервега. Цитирую по предисловию Плеханова ко второму изданию работы Энгельса: «Л. Фейербах», Гиз, 1928 г., стр. 13.
[3] Д. Беркли, Трактат о началах человеческого знания, стр. 85.
[4] Д. Беркли, Трактат о началах человеческого знания, стр. 155.
[5] Д. Беркли, там же, стр. 152.

нания существования объективного мира. Такого мира нет, есть вещи (идеи), которые могут существовать постольку, поскольку мое «я» способно их воспринимать. Но воспринять в одном сантиметре бесконечно-большое количество бесконечно-малых отрезков мое «я» не способно. Значит бесконечно-малое не существует, а поэтому излишне говорить об анализе, ибо наука должна изучать реальное (то-бишь идеи). Правда под влиянием неоспоримых успехов анализа Д. Беркли вынужден был пообещать изложить добытые анализом результаты без употребления «нереальных» бесконечно-малых, но, естественно, обещанного не выполнил.

В последующем своем развитии метафизическая философия неоднократно возвращалась к рассмотрению методологических основ анализа, причем центр критики находился в рассмотрении противоречия между формальной логикой и основами анализа. В ответ на эту критику подавляющее большинство математиков ссылалось на правильность получаемых методами анализа результатов и тем самым оправдывало их. Другая, меньшая часть математиков, пыталась доказать метафизической философии правильность применяемых ими методов, но, как и следовало ожидать, доказать не могла. Не потому конечно, что вообще невозможно доказать правильности основ анализа, а потому, что как бы ни обосновывать анализ, все равно вложить его в рамки формальной логики не представляется возможным. «Нет ничего комичнее,— говорит Энгельс,—чем жалкие уловки, увертки и фикции, к которым прибегает математика, чтобы разрешить эти противоречия, примирить между собой низшую и высшую математику, разъяснить им (т. е. метафизикам. *В. М.*), что то, что является их бесспорным результатом, не представляет собой чистой бессмыслицы» [1]. Сказанное Энгельсом станет особенно ясным, если мы вспомним его же слова: «Элементарная математика, математика постоянных величин, движется, по крайней мере в целом и общем, в границах формальной логики, математика переменных величин, существенный отдел которой составляет исчисление бесконечно-малых, есть в сущности не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям» [2]. Но если не представляется возможным обосновать анализ помощью формальной логики, то это еще не значит, что он не нуждается в обосновании вообще. Действительно без обоснования анализа, без осознания содержания его основ, как уже правильно заметил Гегель, невозможно определить объем приложений анализа. Поэтому Гегель, который отнюдь не склонен был видеть в анализе плод непоследовательного мышления, приходит к необходимости «оправдать исчисление в том, что оно, с одной стороны, понижает бесконечные величины в среду конечности и обращается с ними, как с приращениями или разностями, а с другой стороны, применив к ним формулы и закон конечных величин, пренебрегает ими как определен-

[1] Энгельс, Диалектика природы, 2-е изд., стр. 2.
[2] Энгельс, Анти-Дюринг, 2-е изд., стр. 123.

ными количествами» [1]. Как видно из слов Гегеля, вопрос шел о соотношении $U + \alpha = U$, где α—бесконечно-малое высшего порядка по сравнению с U. Но подчеркиваем, постановка вопроса Гегелем как небо от земли разнится от постановки вопроса метафизиками. Последние пытались примирить анализ с формальной логикой, Гегель же, прекрасно осознавший и показавший недостаточность формальной логики для этого дела, требует оправдания, или вернее обоснования анализа с точки зрения диалектики. Основанием к подобному заключению ему служит вывод, согласно которому «математическое бесконечное важно тем, что в основе его действительно лежит понятие истинной бесконечности и что поэтому оно стоит много выше, чем обыкновенно так называемое метафизическое бесконечное, которое предъявляет возражение против первого» [2]. К сожалению мы лишены возможности проанализировать диалектическое (правда — идеалистическое, ибо в основе лежит не материальная бесконечность мира, а «понятие» истинной бесконечности) обоснование анализа, данное Гегелем. Этот анализ, а так же и критика гегелевского обоснования анализа, и быть может, выходит за рамки нашей работы. Отметим только, что сделанное Гегелем в этой области ждет еще материалистической переработки.

Борьба метафизиков против анализа быть может продолжалась до тех пор, пока в самой математике не возник ряд противоречий, содержание которых, как мы видели выше, характеризовалось невозможностью в ряде случаев удовлетворить установке Ньютона и Лейбница при разложении функций в бесконечные ряды. Когда число подобного рода противоречий возросло, а это было во второй половине XVIII и начале XIX в., математическая мысль сама пришла к необходимости проанализировать содержание этих противоречий, снять их. Этому способствовало еще и то, что в это время математикой был достигнут ряд результатов, касавшихся не «отождествления» и «сведения», а наоборот, «различия» и «несводимости». Так была доказана несводимость уравнения 5-й степени к двучленным уравнениям, несводимость эллиптических функций к элементарным и т. д. Под давлением философской критики математика вынуждена была обратить внимание не только на парадоксы теории бесконечных рядов, не только на факты, касавшиеся различия и несводимости, но пойти глубже—заняться разработкой основ анализа. В этом смысле метафизическая философия сыграла прогрессивную роль.

Желая освободиться от противоречий, математическая мысль в начале пошла по пути, указанному метафизической философией. Она, в лице Лагранжа, в частности в его труде «Leçons sur le calcul des fonctions», стремилась обосновать анализ без какого-либо участия поня-

[1] Гегель, Наука логики, изд. Профкома слушателей ИКП, стр. 174.
[2] Гегель, там же, стр. 157.

тия бесконечно-малого. Но вскоре, отказавшись от этого, перешла на путь, естественно вытекающий из характера проблем, стоявших в то время перед математикой. Результатом этой продолжительной работы, начатой Гауссом и Коши, явилась теория пределов, помощью которой удалось, вообще говоря, снять, по крайней мере на первый взгляд противоречия как в основах самого анализа, так и в теории рядов. С точки зрения теории пределов задача анализа получила вполне конкретное истолкование, отлившись в учение о нахождении пределов отношений бесконечно-малых и пределов сумм бесконечно-малых величин. Теория пределов указала, когда осуществимо тождество $U + \alpha = U$, выявила различие между бесконечными рядами и целой алгебраической функцией, показав, что идея сводимости бесконечных рядов к целым алгебраическим функциям осуществима только в приложении к одному классу бесконечных рядов—абсолютно сходящимся (и равномерно сходящимся), которые хотя и играют в анализе существенную роль, но все же являются только частью возможных бесконечных рядов. В свете теории пределов понятие переменной величины стало более богато содержанием, более конкретно, так как «в представлении предела именно и заключается вышеуказанная истинная категория *качественного* определения отношения между переменными величинами, ибо входящие в него формы их, dx и dy должны быть взяты просто лишь как моменты $\frac{dy}{dx}$, и самое $\frac{dy}{dx}$ должно считаться единым нераздельным значением» [1]. Иначе говоря, понятие предела—конечного—в теории пределов выражено в единстве с бесконечно-малым, бесконечным процессом.

Но было бы ошибочным думать, что теории пределов удалось действительно снять все противоречия, связанные с вопросами обоснования анализа. Наоборот, она выдвинула новые противоречия, которые вытекали из необходимости обоснования самой теории пределов и упирались в проблему континуума и арифметики натурального числа. Теории пределов необходимо было достаточное для ее нужд обоснование непрерывности. Подобного же обоснования математика не имела, так как в то время не было строго обоснованной теории иррациональных чисел. Поэтому-то математика XIX в. вынуждена была стать на путь обоснования континуума (теории иррациональных чисел), т. е. на путь арифметизации анализа. Арифметизация анализа, направление формального обоснования, становится в XIX в. главенствующим направлением при разработке основ анализа, создавая базу, на основе которой выросли работы Дедекинда, Вейерштрасса, Кантора, Гильберта и др. Иначе говоря, основные противоречия были сняты на поверхности, но оставались внутри. Точнее—ушли вглубь. В данном случае вполне подтверждается мнение М. Я. Выгодского, которое он высказал в связи с анализом развития понятия числа. «Противоречия находят свое разре-

[1] Гегель, там же, стр. 178. Подчеркнуто мною. *В. М.*

шение, но не исчезают полностью даже в «завершенной» логической системе—если можно говорить о таковой. Они лишь сдвигаются в область основных понятий науки» [1]. Насколько это верно, лучше всего видно из современных попыток обоснования анализа, пока приведших либо к необходимости тяжелых для математики уступок, подобно тому, как на это шел например Лагранж (теория типов Рёсселя, интуиционизм), либо к парадоксам теории множеств.

Таким образом перед математической мыслью XIX в. поставлена проблема континуума, связанная с вопросами арифметизации анализа. Однако, если бы мы ограничились только внутренней логикой развития математики, рассмотрев как вокруг этой проблемы концентрировались вопросы обоснования математики,—то исказили бы исторический процесс, ибо мы абстрагировались бы от общественно-экономической обстановки. Поэтому, чтобы разобраться в действительном положении вещей, оставим на время рассмотрение вопросов, связанных с обоснованием анализа, и посмотрим, чем характеризовалось развитие математики, начиная от эпохи Возрождения и кончая первой половиной XIX в. и чем в отличие характеризовалось ее развитие во второй половине XIX в. [2]

Рост математики от эпохи Возрождения до конца первой половины XIX в. обусловливается с прогрессивным развитием буржуазной общественно-экономической формации. Развитие математики данного периода осуществлялось на основе тесной связи с развитием техники, механики, астрономии, физики и т. д. Усилия математики преимущественно были направлены на решение проблем, которые в изобилии поставлялись естествознанием и техникой. Не математика предрешала развитие естествознания и техники, а наоборот, математика стихийно, неосознанно шла в направлении, указываемом техникой и естествознанием. Этим в конечном счете и объясняется тот факт, что математика этого периода преимущественно занималась вопросами, связанными с понятием потенциально бесконечного. В качестве одной из характерных черт этого периода должно отметить еще и то, что в это время вопросы обоснования математики, вообще—методологии математики, не имели самодовлеющего значения. Вопросы методологии ставились в связи с ростом математики, помогая осмысливать содержание вновь открываемых фактов. Этому росту математики не могло помешать и то, что ее основы непрерывно подвергались нападкам со стороны приверженцев метафизической философии. Больше того, нападки метафизической философии способствовали толь-

[1] М. Выгодский, Понятие числа в его развитии, ж. «Естествознание и марксизм», № 2 за 1929 г. Помещено в настоящем сборнике.

[2] То, что будет сказано в связи с этим вопросом, в лучшем случае должно рассматривать как рабочую гипотезу. Обусловливается это отсутствием марксистски разработанной истории математики.

ко тому, что в процессе борьбы она объективно была отстранена от обоснования математики, а математика, воспользовавшись указаниями метафизической философии, как например было в эпоху Гаусса, Коши и др., подошла к вопросам обоснования математики в основном так, как этого требовало состояние науки того периода. Объясняется это тем, что в области методологических предпосылок математика рассматриваемого периода была более прогрессивна, более диалектична, чем современное ей естествознание. Обобщая, можно сказать, что в рассматриваемой нами эпохе, эпохе буржуазных революций, хотя и были периоды кризисов методологических основ математики, но по своему характеру они были кризисами роста.

Совсем иное положение вещей наблюдается в конце первой половины и во второй половине XIX в. Если раньше, буржуазия была одним из классов, боровшихся за господство, то начиная с 1830 г., а в особенности после революции 48-го года, она выступает в качестве класса, отстаивающего свое господство. В соответствии с этим произошел колоссальный сдвиг в идеологии буржуазного общества, который сыграл, решающую роль в деле направления развития как математики, так и методологии математики. «Немедленно после революции 1848 г.,—пишет Энгельс,—«интеллигентная» Германия распрощалась с теорией, взявшись за практическую деятельность». «Что же касается исторических наук, до философии включительно, то здесь, вместе с классической философией, совсем исчез старый дух ни перед чем не останавливающегося теоретического исследования. Его место заняли бессмысленный эклектизм, заботы о доходных местечках, об успехах по службе и даже самое низкое лакейство» [1]. То же самое в основном может быть сказано и о теоретическом мышлении других наций этого периода. Теоретическое мышление было отброшено, была отброшена диалектика Гегеля, на место которой, как нечто «новое», «модное» были поставлены старые, как мир, метафизическая и эклектическая философии. Сказанное станет более убедительным, если мы напомним, что наметившиеся в 1848 г. тенденции философии получили еще большее развитие в связи с поражением Парижской Коммуны, падением I Интернационала, и связанным с ними упрочнением промышленного капитализма. Именно в недрах трех последних десятилетий XIX в. получают особое развитие всякие «теории» и «теорийки», которые не только «доказывают» незыблемость капитализма, но и исходят из этой «незыблемости». Именно в эти десятилетия с особой ясностью намечается и осуществляется разрыв между теорией и практикой, идеологическим отражением чего явилось «учение» о «чистой» и «прикладной» науках, с оттенком презрения к последней. Таким образом новое в обстановке второй половины XIX в. далеко не способствовало прогрессивному развитию математики поскольку, в вопросах обоснования, математика подошла к таким проблемам (проблема кон-

[1] Энгельс, Л. Фейербах, Библиотека марксиста. Вып. XIV, стр. 75.

тинуума), которые требовали чего угодно, только не метафизики и эклектизма.—Правда в связи с развитием техники и экономики этого периода математика попрежнему идет по линии накопления нового фактического материала, но обнаруживает при этом несомненную тенденцию к замаскированию своей связи с техникой и естествознанием. Что же касается методологии математики, то она попадает под непосредственное влияние философии идеалистической. Вопросы методологии возникают в математике не изнутри, а извне—ставятся метафизической философией, требованием которой является нахождение вечной, незыблемой, непротиворечивой системы обоснования математики. Это, как мы увидим из дальнейшего, привело к формализации математики, к еще большему отрыву ее от практики, к выдвижению в математике на первый план проблем формального обоснования, с односторонним предпочтением актуально-бесконечного. Конечным же результатом всего этого были господствующая теперь путаница и бессвязность в современной нам буржуазной методологии математики.

Но тут нужно оговориться. Нельзя конечно думать, что проведенное нами разделение математики XIX столетия на два периода в точности совпадает с двумя половинами этого столетия. Действительно, хотя Гаусс и является представителем первого направления, но в некоторых вопросах он стоит на точке зрения второго. Наоборот, Больцано, которого справедливо считают родоначальником формализма, ведет свои исследования в первой половине XIX в.

Однако возвратимся к интересующему нас вопросу и посмотрим, как в новой обстановке решались вопросы обоснования математики. С этой целью нам необходимо будет перейти к рассмотрению учения Больцано.

Больцано исходит из убеждения, что все противоречия, связанные с понятием актуально-бесконечного, только кажущиеся противоречия. Поэтому он старается развернуть единое учение об актуально-бесконечном, без присущих этому понятию противоречий. Конечную же цель своих исканий Больцано видит в решении ряда проблем, связанных с обоснованием математики.

«Само название показывает», говорит Больцано,—что бесконечное противопоставляется всему конечному» [1]. Но в то же время как конечное, так и бесконечное «относятся к многообразиям (т. е. к многообразиям единиц) [2]. Следовательно,—умозаключает Больцано,—если между конечным и бесконечным существуют различия, то очевидно они являются следствием модификаций многообразий. Поэтому прежде чем изучать различия конечного и бесконечного, необходимо рассмотреть модификации многообразий. По этому пути и пошел Больцано, перенеся центр своего внимания на изучение многообразий.

[1] Больцано, Парадоксы бесконечного, Одесса, 1911 г., стр. 77.
[2] Больцано, там же.

Совокупности,—говорит Больцано,—бывают разные. Возьмем например стакан и осколки стакана. Очевидно, что с точки зрения пригодности этих совокупностей к удовлетворению жажды они различны. Но чем, в конечном счете, обусловливается это различие? Да очевидно не чем иным, как расположением элементов данных совокупностей. Следовательно «то, что лежит в основании различия таких совокупностей, мы называем способом соединения или расположения их частей» [1].

Таким образом, согласно Больцано, различие вещей, в широком смысле этого слова качество—не есть объективная категория. Оно растворимо в количественном, сводится к нему. Действительно, всякая вещь являет собой совокупность. Но если различия совокупности обусловлены и могут быть целиком объяснены из расположения их частей (молекул, атомов, электронов—чего хотите), то объективно качества нет и не может быть. Оно — лишь вспомогательное понятие, выражающее собою внешнее расположение частей данной совокупности. Поэтому-то Больцано так презрительно отзывается о Гегеле, который признавал «какую-то» качественную бесконечность.—Если, говорит он,—и можно говорить о бесконечном вообще, то только как о количественном бесконечном.

Продолжая анализировать понятие совокупности, Больцано приходит к выводу, что для математики представляют интерес именно те совокупности, различие которых не обусловливается порядком следования элементов. «Совокупность, определяемую таким понятием, при котором расположение частей безразлично (в котором следовательно не происходит существенных изменений, если меняется только расположение частей), такую совокупность я называю многообразием; а такое многообразие, все части которого будут рассматриваемы как единицы известного рода A, т. е. как предметы, содержащиеся в понятии A, называется множеством предметов A» [1]. Если подобное множество обладает тем свойством, что оно само состоит из множеств, то такое множество называется суммой. Так например $A + B + C = A + (B + C)$ представляет собою сумму. Установив впоследствии понятия величин и ряда, Больцано заключает: «Я буду называть бесконечным количеством количество большее, чем каждое конечное, т. е. количество такого рода, что каждое конечное многообразие представляет только часть его» [2]. При этом он считает что «приведенное здесь определение обоих понятий, конечного и бесконечного количества, устанавливает различие между ними так, как его представляют себе те, кто употреблял эти выражения в строгом смысле слова» [3].

С этим едва ли можно согласиться. Коль скоро бесконечное определяется с помощью понятия—«каждое конечное», которое несомненно уже само по себе содержит понятие бесконечного,—

[1] Больцано, там же, стр. 9.
[1] Больцано, там же, стр. 9.
[2] Больцано, там же, стр. 11.
[3] Больцано, там же, стр. 11.

логический круг этого определения становится вне всякого сомнения. С другой стороны, употребление слова «больше» в отношении к бесконечным совокупностям надо оправдать, а этого оправдания Больцано не дал. Ничем не оправдан термин «бесконечное количество», который в связи с вышесказанным—хотим ли мы этого—или не хотим, наталкивает нас на представление о бесконечном как о какой-то простой сумме. Но самое главное заключается не в этом, а в том, что данное определение не подчеркивает специфического в актуально-бесконечном, так как оттеняемое этим определением отношение конечного к актуально бесконечному характерно подчас и для самих актуально бесконечных. Как мы покажем впоследствии, впервые сущность определяющего различия актуально бесконечного от конечного была выявлена Г. Кантором. Вот поэтому-то, когда на основании данного определения и связанных с ним понятий Больцано сделал попытку обосновать теорию актуально бесконечных величин, то потерпел фиаско, так как он не смог найти того специфического, особенного, чем должно было характеризоваться это учение.

Впрочем несмотря на то, что эта попытка была неудачной, Больцано все же чувствовал по какому пути должно пойти изучение актуальнобесконечного, так как он говорил, что бесконечное может быть понято в сравнении с другим бесконечным. Больцано даже подошел к этому сравнению, так как для него не было чуждым понятие мощности множества [1].

«Я утверждаю, два бесконечных многообразия могут быть в таком отношении одно к другому, что, с одной стороны, возможно соединить каждую вещь одного многообразия с некоторой вещью другого в пару таким образом, что не остается в обоих многообразиях ни одной вещи, не соединенной в пару, и ни одна вещь не будет входить в две или несколько пар. С другой стороны, возможно при этом, что одно из этих многообразий заключает в себе другое просто как часть, так что множества, которые они представляют, если мы рассматриваем составляющие их вещи, как равные, т. е. как единицы, имеют между собою самые разнообразные отношения» [2]. Например из соотношения $5y = 12x$ следует, что каждому значению X соответствует одно и только одно значение y. Но если y будет изменяться в пределах $0 \leqslant y \leqslant 12$, то x изменяется в пределах $0 \leqslant x \leqslant 5$, т. е. несмотря на то, что множество x-ов входит в множество y-ов, по множественности оно все же ему эквивалентно. Но использовать это свойство бесконечных многообразий для определения бесконечного Больцано не смог, так как он не усмотрел в понятии мощности принципа сравнения бесконечных множеств. Он не имел тех

[1] Впрочем в этом отношении Больцано был отнюдь не первым. Этими проблемами занимались уже схоласты, этой теме посвящена и часть одного из галилеевских диалогов.

[2] Больцано, там же, стр. 30.

побудительных причин к исследованию актуально бесконечного, кои выросли во время Кантора и которые направили это исследование по более правильному пути.

Помимо попытки построения теории актуально бесконечных величин Больцано всячески старается опровергнуть возражения противников актуально бесконечного. Он подробно разбирает определения, которые давались потенциально-бесконечному и естественно их отбрасывает. С его точки зрения переменная величина не обладает предметностью в собственном смысле слова,—она предметна лишь постольку, поскольку отмечает ряд некоторых постоянных величин. Что касается противников бесконечных множеств, то они преимущественно выдвигали следующее возражение. Возьмем последовательность: 1,2... n... каково бы ни было конечное n—всегда множественность этой последовательности характеризуется (равняется) n. Значит и множество всех чисел должно характеризоваться некоторым числом, которое так же велико, как это множество. Но всякое число натурального ряда не бесконечно, значит нет и бесконечных множеств. На это возражение Больцано указывает, как на плод непоследовательного переноса свойств конечных множеств на бесконечные. Действительно, каждое конечное множество имеет последний член, но сказать того же о бесконечном множестве нельзя. Бесконечное множество ряда натуральных чисел не имеет последнего члена, так как он исключается законом составления ряда.

Естественно возникает вопрос: а что дает нам право рассматривать множества без последнего члена (бесконечные множества) как единое целое? И вообще что представляют собой подобные множества, т. е. даны ли они только в мышлении или имеют реальное, независимое от нас существование?

«Существует,—отвечает Больцано,—мнение, которое гласит, что многообразие не существовало бы, если бы не было кого-либо, кто бы думал о нем» [1]. Но этот взгляд по мнению Больцано, ошибочен. «Еще до того, как мыслящее существо связало оба атома в своем представлении, они уже находились во взаимоотношении, например в силу притяжения и т. п.; и если бы только это мыслящее существо не предприняло под влиянием своих мыслей никаких действий, которые повлияли бы на отношения между обоими атомами, то было бы совершенно неверно утверждать, что только благодаря тому, что их мыслят вместе, между ними возникли отношения, которых без этого не было бы; неправильно также утверждать, что эти отношения не существовали между ними и раньше» [2]. Значит, «возможность мыслить вещь никоим образом не составляет основания для возможности ее существования. Напротив того, возможность существования вещи составляет основание, для того чтобы разумное существо, если оно только не впадает в ошибку, нашло эту вещь возможной или, как говорят (в переносном смысле) мыслимой,

[1] Больцано, там же, стр. 2,
[2] Больцано, там же, стр. 19.

т. е. чтобы ее можно было мыслить» [1]. На вопрос о том, возможны ли множества без последнего члена, Больцано отвечает следующим образом: для представления бесконечного множества нет необходимости знать все элементы, входящие в состав множества—«нужно только, чтобы было налицо родовое понятие, заключающее в себе все эти части и не заключающее ничего другого» [2]. Иначе говоря, существуют вне «я» бесконечные множества с присущими им, т. е. с не привнесенными нами особенностями, кои могут быть выявлены в родовом объединяющем понятии.

Но реальность множеств не есть первое. Наоборот, оно второе в отношении первого—чистых понятий [3]. Поэтому то, «что противоречит истине, содержащей чистые понятия, то следует назвать невозможным; возможно следовательно то, что не противоречит никакой истине, содержащей чистые понятия» [4]. Нечистые понятия отражают реальность, а эта реальность отражает чистые понятия. Чистые понятия первое, данное, неизменяющееся, истинное. Иначе говоря математик не творит, не создает математических объектов, а только,—открывает, выявляет их существование, поскольку бытие математических объектов отражает сущность чистых понятий. Поэтому истинность высказываемых в математике положений не исчерпывается их внутренней непротиворечивостью, а имеет базой согласованность с чистыми понятиями. Суммарно—*мир не есть развивающееся, а есть раскрывающееся. Нет становления, есть только бытие.* Также и в математике. Нет потенциальной бесконечности, есть только актуальная бесконечность. «Континуум существует там и только там, где имеется совокупность простых предметов (точек во времени или в пространстве или субстанций), расположенных таким образом, что каждый из них на каждом, сколь угодно малом расстоянии, имеет по крайней мере один соседний с ним элемент» [5].

Таким образом учение Больцано представляет собою образец применения к обоснованию математики, метафизического метода, базирующегося на объективном идеализме. Таков был первый этап к теории Кантора. Больцано первый систематизировал парадоксы в области актуально бесконечного, первый сделал попытку построения теории актуальнобесконечного без присущих этому понятию противоречий. Кантор воспринял у него не только проблему, но и метафизически-идеалистический подход к ней. Однако, между Больцано и Кантором есть и существенная разница.

Как во время зарождения анализа актуально бесконечное *противостояло* потенциально-бесконечному, и ничто не давало права пред-

---

[1] Больцано, там же, стр. 21.
[2] Больцано, там же, стр. 19.
[3] Больцано столь часто оперирует понятием чистых идей как основой своих рассуждений, что мы считаем себя вправе не давать в подтверждение сказанному выдержек из его работ.
[4] Больцано, там же, стр. 23.
[5] Больцано, там же, стр. 68.

ставить их в некотором единстве,—так и после Больцано, т. е. после длительного процесса роста объема и содержания этих понятий они оставались абсолютно отчужденными, ничем не связанными друг с другом. Их отчужденность усугублялась тем, что ко времени работ Кантора значение актуальнобесконечного для математики фактически равнялось нулю. Более того, как до Больцано большинству математиков актуально-бесконечное представлялось внутренне противоречивым, так и после Больцано это понятие сохранило присущую ему противоречивость. Поэтому нельзя все же не усмотреть заслуги Г. Кантора в том, что он первый сделал попытку дать в единстве потенциально бесконечное с актуально бесконечным. Однако то единство, в котором он представил эти два вида бесконечного, в конечном счете через посредство растворения непрерывного в дискретном опять-таки свелось к одному из них, именно—актуально-бесконечному.

Исходным пунктом Г. Кантора явилась теория тригонометрических рядов, в которой ему пришлось рассматривать бесконечные совокупности точек как данные, ставшие. Ему удалось выявить, что в свете стоявших вопросов, а главное—ответов на них, данные множества в смысле их множественности выступают не как равнозначные, а, наоборот, как различные. Но для того, чтобы можно было выявить эти различия, нужно было раньше найти принцип сравнения исследуемых множеств. Этот принцип был найден Кантором в давно известном одно-однозначном соответствии. Кантор ввел термин «мощность», полагая, что два множества обладают одинаковой мощностью, если между их элементами можно установить одно-однозначное соответствие. Исходя из подобного понимания «равенства множеств», Кантору в 1873 г. удалось показать, что множества натуральных чисел, рациональных чисел и алгебраических чисел обладают одинаковой мощностью (счетною мощностью) и что наконец множество всех вещественных чисел обладает высшей мощностью—мощностью континуума. Несколько позже им было доказано, что мощность континуума не зависит от числа измерений и что множество всех функций (непрерывных и разрывных) обладает мощностью высшего порядка, т. е. мощность его более мощности всех вещественных чисел или всех непрерывных функций. Кроме этого Кантору удалось выявить еще одно замечательное свойство бесконечных множеств. Нетрудно усмотреть, что мощность четных чисел эквивалентна мощности ряда натуральных чисел. В то же время ряд четных чисел входит в натуральный ряд, является его частью. Но что особенно важно, это то, что рассмотренное свойство натурального ряда принадлежит всем без исключения бесконечным множествам. А именно: оказывается, что из бесконечного множества всегда можно выделить такое множество, которое будет обладать мощностью данного множества. Поэтому оказалось возможным определить бесконечное множество, как такое множество, которое по мощности эквивалентно некоторой его части. Кантор так и сделал.

Это определение подчеркивает существенное различие бесконечных множеств от конечных. Различие, которое присуще всем бесконечным множествам. При этом данное определение не есть плод спекулятивного мышления, а является следствием рассмотрения свойств конкретных множеств. И наконец это определение дает возможность дальнейшего изучения свойств бесконечных множеств, чего отнюдь нельзя сказать например об определении Больцано. Но, если природа бесконечных множеств представляет резкое отличие от природы конечных, то нет никаких оснований к тому, чтобы приписывать им a priori свойства конечных множеств. Они представляют собою область, которая должна быть изучена в своей непосредственности, в самой себе. В этом умозаключении Кантора как будто нет ничего нового, так как оно имеется и у Больцано. На самом деле это не так. Больцано пришел к нему от рассмотрения отдельных примеров бесконечных множеств, без их систематического изучения, а главным образом на основе спекулятивных рассуждений о природе божества. Кантор же, наоборот, поднялся до осознания этого вывода от систематического изучения бесконечных множеств, от выявления присущих им всем специфических свойств. Новое в определении бесконечного множества и мощности заключалось не в том, а в том, что они, впервые в истории математической мысли, имели своим основанием как раз то, что до них считалось фактами, отвергающими актуально бесконечное. Действительно первое из них предполагает возможность мыслить актуально бесконечное как целое, второе является прямым отрицанием справедливости аксиомы Архимеда. И в то же время, несмотря на это, они создавали, как казалось, ту базу, на основе которой можно было продолжить изучение бесконечного.

Таким образом изучение конкретных множеств дало право Кантору утверждать наличие трех различных мощностей, которые характеризовали собою строго отличные бесконечные множества. Но исчерпываются ли этими тремя мощностями всевозможные мощности? Нельзя ли попытаться продолжить этот ряд мощностей и изучить их? Вот те вопросы, которые естественно напрашивались после первых открытий Кантора. С другой стороны, факт совпадения мощности класса непрерывных функций с мощностью континуума заставлял думать о наличии более глубоких связей между непрерывными функциями и областями их изменений, и тем самым искать нового подхода к решению проблемы континуума. Естественно, что переходя к решению подобных проблем, Кантор должен был оставить в стороне конкретные множества и приступить к изучению бесконечных множеств вообще, мощности вообще и т. д. Но подобный анализ абстрактного понятия множества не мог обойтись без соответствующего методологического обоснования. Кантор это обоснование дал помощью приспособления к нуждам его учения видоизмененной им методологии Больцано. Поэтому мы подойдем к рассмотрению его учения не непосредственно, а от рассмотрения его основных методологических предпосылок.

Приступая к анализу проблемы бытия и мышления [1], Кантор безоговорочно заявляет себя сторонником дуалистического миропонимания, признавая наличие как трансиентной, так и имманентной реальностей. Но этот дуализм первоначальной установки снимается и превращается им в объективный идеализм (явный теологизм), когда он подходит к анализу связи этих субстанций. «Эта связь обеих реальностей,—говорит Кантор,—имеет свой собственный корень в единстве всего, к которому мы сами принадлежим» [2], т. е. в боге. На вопрос о роли опыта и разума в образовании понятий Кантор отвечает в согласии с духом своей идеалистически-рационалистической установки. Для него «внешний опыт может в лучшем случае дать лишь толчок к созданию этих идей, по существу же они образуются путем внутренней индукции и дедукции, как нечто, что до известной степени лежало уже в нас и лишь было пробуждено и доведено до сознания» [3]. Иначе говоря, человеческое «я» является хранилищем, где до поры до времени покоится весь багаж идей, заложенный очевидно в нас богом. Задача же исследователя заключается в том, чтобы пробудить помощью внутренней индукции и дедукции (тоже заложенными богом!) дремлющие в нас понятия и тем самым довести их до нашего сознания.

Как известно, подобные умозаключения не составляют новооткрытия Кантора. Уже Платон утверждал самостоятельное существование идей. Наконец в любой теологической концепции можно найти все то, что говорил Кантор по поводу проблемы бытия и мышления. Недаром объект теории множеств, а главное—ее основы, служили поводом к продолжительной и взаимо-доброжелательной переписке между рядом теологов и Кантором.

Но как с точки зрения Кантора образуются новые понятия? «Берут,—говорит Кантор,—некоторую, лишенную свойств, вещь, которая первоначально есть не что иное как имя или знак A, и придают ей закономерным образом различные, даже бесконечно многие, понятные предикаты, значение которых известно уже из наличных идей и которые не должны противоречить друг другу. Раз это закончено, то имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия A; оно появляется на свет, снабженное такой интрасубъективной реальностью, которую лишь можно требовать от понятий. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом метафизики» [4]. Но что это за имя или знак «A», что означает «закономерным образом»? Есть ли это беспредметные, лишенные содержания и произвольные любые знаки, или в каждом случае новообразования понятий они выступают, пусть без содержания, но все же в единой, закоснелой форме? По Кантору знак A, хотя и беспредметен, но не неопределенен. Он эквивалентен неопределимому понятию совокупности. Последнее же становится понятием тогда и только тогда,

[1] Этот анализ дан Кантором в ряде замечаний и примечаний в его работах. Чисто философских работ у Кантора нет.
[2] Кантор, там же, стр. 74.
[3] Кантор, там же, стр. 74.
[4] Кантор, там же, стр. 75.

когда мы включаем в нее определенные понятия (объекты), подчиняющиеся определенному закону, или, что то же, наделенные некоторым наличием аналогичных предикатов. При этом, вкладываемые понятия не являются чем-то новым, а, наоборот, заимствуются из наличных идей. Например, Кантор говорит: «Я рассматриваю целые числа и порядковые типы, как универсалии, которые относятся ко множествам и получаются из них (подчеркнуто мною, В. М.), когда абстрагируют от состава их элементов». Но всякое число связано с совокупностью и порядком следования предшествующих ему чисел, т. е. имеет основой своего происхождения ту же совокупность и закон. Иначе говоря для всякого понятия характерно не то, что в нем содержится, а то, что его характеризует как целое.

Таким образом по Кантору процесс познания, если только в данном случае позволительно говорить о процессе, сводится к простой комбинаторике наличного запаса идей в рамках неопределенных вложенных в нас понятий совокупности и закона. Мир Кантора—упрощенный мир. В нем нет места ни самодвижению, ни внутренне-присущих вещам различиям. Все есть одно, равнозначно в отношении к другому, сводится к нему; т. е. качество—субъективная категория, выражение расположения, символ количественного закона. Целеустремленность подобной методологии лучше всего характеризовать словами Пуансо: «Мы знаем в полной мере только один закон, это закон постоянства и единообразия. К этой простой идее мы стремимся свести все прочие идеи и единственно в этом сведении заключается для нас наука» [1]. В действительности дело обстоит не так: существует лишь закон единства постоянного и изменчивого, единообразия и разнообразия. Мы ничего не хотим насильно сводить, а только хотим понять каждое явление в его связи с предыдущим, и в его особенности, различии от предыдущего. В таком сведении которое специфично для методологии Кантора, нельзя не усмотреть слияния, единства, идеализма с механистической, метафизической методологией.

Что касается проблемы существования и критерия истины, то трактовка вопросов, связанных с ними, дается Кантором в духе его идеалистической установки. С его точки зрения можно говорить о двух видах существования или реальности. Идея существует, коль скоро она получила достаточный к тому комплекс определений [2], выделяющий и отграничивающий ее от других идей. Так, если мы вводим новые числа, то достаточно дать им определения, после чего они получают определенность и независимость существования. Этот вид существования или реальности Кантор именует интрасубъективным или имманентным видом существования. Другой вид—транзиентный—характеризуется соответствием идеи объектам внешнего мира или ранее

[1] Poinsot, Elementsde Statique, Paris, 1861, p. 239.

установленным идеям, как например соответствие трасфинитных чисел конкретным множествам. Но как и следовало ожидать, для Кантора последний вид реальности имеет второстепенное значение. Для него, как и для Платона, идея обладает высшей достоверностью, ибо только ей присуща истина. Проверять транзиентную реальность математических понятий математика не обязана. Транзиентная реальность, дана в единстве с имманентной реальностью (конечно помощью бога), а поэтому и не может противоречить ей. «Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем само собой разумеющимся условием, что ее понятия должны быть свободны от внутренних противоречий и должны также находиться в неизменных, установленных определениями отношениях и образованным раньше, уже имеющимся налицо испытанным понятиям» [1].

С этим критерием Кантор подходит ко всем основным категориям. Поэтому нет ничего удивительного в том, что согласно Кантору «в природе нет ничего, подобного объективному или абсолютному времени». Ту же участь естественно разделяют пространство и потенциально-бесконечное, так как ни время, ни пространство, ни потенциально-бесконечное не входят в рамки постоянства и определенности. Для Кантора каждое из них «вспомогательное понятие, понятие отношения, благодаря которому устанавливается отношение между различными данными в природе и воспринимаемыми нами движениями» [2]. Только актуально бесконечное, не развертывающееся, не становящееся, а, наоборот, заранее, как всякая конечная совокупность, данное своим законом может претендовать на существование исуществует. Только совокупность состояний, множественность моментов характеризует движение, и только в этой множественности оно может быть понято.

Нетрудно усмотреть, что в основном методология Кантора совпадает с методологией Больцано. Но в то же время она содержит и отличие, поскольку в ней, как и в учении о конкретных множествах, узаконен и выдвинут на первый план приоритет объема понятия перед его содержанием. Это и составляет специфическое методологии Кантора. Иначе говоря, с какими методологическими предпосылками подходил Кантор к изучению конкретных множеств, точно с такими же предпосылками он подходил и к построению абстрактной теории множеств. Поэтому, следуя за Кантором, нам надлежит рассмотреть, к чему привела Кантора его методология при построении абстрактного учения о множествах.

«Под многообразием или множеством,—говорит Кантор,—я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т. е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона» [3]. Например все цвета радуги, все положительные числа, все точки окружности и т. д.

[1] Кантор, там же, стр. 31.
[2] Кантор, там же, стр. 48.
[3] Кантор, там же, стр. 69.

будут множествами, так как в основе соединения их элементов лежат некоторые основные понятия, подчеркивающие общность этих элементов. Нельзя не отметить, что данное Кантором определение множества не содержит в себе различия бесконечного множества от конечного, и что понятие множества неотделимо от понятия закона. Последнее особенно важно, так как, как мы видели, синтез закона с общим понятием множества является одним из краеугольных камней методологии Кантора. В этом между прочим заключается и сходство Кантора с Больцано. Как для первого, так и для второго—закон является одним из основных понятий.

Если мы абстрагируемся, как от состава элементов множества, так и от их взаимных отношений, то результатом этого абстрагирования будет то, что Кантор называет мощностью или количественным числом. Это определение, как и определение множества, опять-таки очень тощее и, чтобы конкретизировать его, Кантору пришлось ввести понятие эквивалентности, согласно которому два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить одно-однозначное соответствие. Но если мы даем такое определение мощности, которое не исходит из рассмотрения конкретных множеств, а, наоборот, предшествует им, то естественно возникает вопрос: а всегда ли возможно доказать эквивалентность или неэквивалентность двух множеств? Может быть существуют такие множества, которые, согласно определению, обладают мощностью, но которую однако мы не можем выявить, ибо в силу тех или иных причин, сам вопрос об установлении или о неустановлении взаимно однозначного соответствия будет лишен смысла? Иначе говоря—в чем критерий возможности сравнения мощности двух множеств? При решении этого кардинального для общего учения о многообразиях вопроса Кантор исходил из выработанного им понятия вполне упорядоченного множества.

Возьмем ряд натуральных чисел. Как известно, легко установить одно-однозначное соответствие членов этого ряда с членами ряда четных чисел. Но почему в этом случае нам удалось установить одно-однозначное соответствие? Да очевидно потому, что члены двух данных рядов вполне упорядочены. Обратно, коль скоро о двух множествах можно сказать, что элементы их вполне упорядочены, всегда можно ответить на вопрос—равномощны ли два данных множества или нет. Конечно этим не исключена возможность установления одно-однозначного соответствия и у неупорядоченных множеств. Например множества точек отрезка (0,1) и точек квадрата равномощны. Однако говорить об упорядоченности соответствия в том смысле, как мы говорили выше, в этом случае совершенно не приходится. Но это очевидно не касалось рассуждений Кантора. Он рассматривал абстрактные множества, возможность сравнения мощностей которых затруднялась отсутствием специфических свойств конкретных множеств, в силу чего требовалось установить общий принцип возможности подобного сравнения. Таким образом из сказанного следует вывод, что если удастся установить прием, помощью которого возможно представить множества в вполне упорядоченном виде, то сам собою будет решен вопрос о критерии возможности сравнения мощностей множеств.

Представим себе, что мы имеем некоторое множество и абстрагируем от содержания его элементов, но оставляем в поле зрения порядок их следования. Тогда мы получим то, что Кантор называет упорядоченным множеством, или порядковым типом, или идеальным числом. Если же данное упорядоченное множество имеет первый член и его каждая часть также имеет первый член, то оно называется вполне упорядоченным множеством, а идея о нем, универсальное его представление есть то, что Кантор именует порядковым числом. Как видим, эта сторона вопроса—формальное установление понятия вполне упорядоченного множества—выполнена Кантором более чем достаточно. Гораздо хуже обстоит дело со второй частью—доказательством возможности перехода от множества вообще к упорядоченному множеству и от упорядоченного множества к вполне упорядоченному множеству. Кантор только ограничился обещанием: «В одной дальнейшей работе я вернусь к тому основному, чреватому следствиями и особенно замечательному своей общезначимостью закону мышления, согласно которому всегда возможно придать всякому строго определенному множеству форму вполне упорядоченного множества» [1]. К сожалению обещанного он не выполнил и мы можем только строить догадки о том «универсальном законе мышления», помощью которого можно было бы обосновать столь важный пункт теории множеств [2].

Если нам даны два вполне упорядоченных множества, то, как мы видели, вполне возможно говорить о допустимости сравнения их мощностей. Более того само определение вполне упорядоченного множества говорит нам за то, что при подобного рода сравнении, даже при равномощности сравниваемых множеств могут быть обнаружены различия в множествах, обусловливаемые законом следования элементов. Только в одном случае мы можем говорить о полном совпадении, если хотите, равенстве сравниваемых двух вполне упорядоченных множеств. А именно: «Если возможно такого рода взаимное однозначное сопряжение, что когда E и F представляют два элемента одного множества, E_1 и F_1 соответственные элементы другого множества, то всегда положение E и F в последовательности первого множества находится в согласии с положением E_1 и F_1 в последовательности второго множества, так что, когда E предшествует F_1 последовательности первого множества, то и E_1 предшествует F_1 в последовательности второго множества». Как видим, идея следования или, вообще говоря, закон образования множества является основным фактором, обусловливающим количество—тип данного множества. Но если это так, то необходимо классифицировать эти типы, дабы тем самым создать представление о возможных выражениях вполне упорядоченных множеств. И так как в области конечных множеств подобной мерой мощности и типа является число, то значит необходимо расширить понятие числа,

[1] Кантор, там же, стр. 11.

[2] В своих работах Кантор иногда просто допускает возможность упорядочения множеств помощью отнесения к ним определенных законов. Более того есть основания думать, что Кантор считал, что среди законов, образующих данное множество, найдется по крайней мере один, помощью которого множество можно представить в виде вполне упорядоченного множества.

выйти за рамки конечного, дабы иметь возможность подобного представления и бесконечных множеств.

Возьмем ряд целых чисел: 1, 2, 3,.., ν... (1). Каждый последующий член этого ряда (кроме первого) получается из предыдущего путем повторного полагания единиц. Следовательно нет никаких оснований к тому, чтобы говорить о последнем члене этого ряда. Однако «как ни противоречиво было бы говорить о наибольшем числе класса (1), с другой стороны, нет ничего нелепого в том, чтобы вообразить себе некоторое новое число—назовем его $\acute{\omega}$,—которое должно быть выражением того, что нам дана, согласием своему закону, в своей естественной последовательности вся совокупность (1)» [1]. Это ω и есть то число, которое характеризует собою последовательность (1), взятую в целом. Если теперь к ω применить то, что Кантор называет первым принципом порождения и что являет собою тот же акт повторного полагания единиц, то легко получить ряд чисел: $\omega, \omega+1, ..\omega+\gamma...(1, 1)$ Логическая функция, обусловливающая порождение последующего ряда: $2\omega, 2\omega+1, ..., 2\omega+\gamma ... (1, 1, 1, ..)$ очевидно будет отличной от первого принципа порождения, так как для образования $(1, 1, 1, ...)$ ряда необходимо наличие второго принципа порождения, действенную сторону, сущность которого Кантор определяет так: «Если дана какая-нибудь определенная последовательность определенных целых реальных чисел, то на основании этого второго принципа порождения создается новое число, которое мыслят как предел этих чисел, т. е. которое определяют как первое большее всех их число» [2]. Совокупное действие этих двух принципов порождения приводит нас к рядам:

$$\mu\omega,\ \mu\omega+1, ..., \mu\omega+\gamma ...$$
$$\gamma_0\omega^{\alpha}+\gamma_1\omega^{\alpha-1}+ ...$$
$$\omega^{\omega},$$

которые в целом образуют некоторый класс трансфинитных чисел, так называемый второй числовой класс. Отсюда уже нетрудно доказать, что «каждое множество мощности первого класса перечислимо (abzählbar) с помощью чисел второго числового класса, и только с помощью подобных чисел, причем элементам этого множества можно придать такую последовательность, что оно в этой последовательности становится перечислимым с помощью любого данного наперед числа второго числового класса; это число и показывает количество элементов множества по отношению к рассматриваемой последовательности» [3]. Привлекая к действию принцип ограничения Кантора, можно образовать понятие о числе Ω, которому предшествуют все числа I и II классов, и которое поэтому является первым числом III класса. Но создание Ω дает возможность выработать понятие о III классе трансфинитных чисел, а значит и о наличии новой мощности. Отсюда уже само собою вытекает, что процесс созидания классов трансфинит-

[1] Кантор, там же, стр. 53.
[2] Кантор, там же, стр. 55.
[3] Кантор, там же, стр. 10.

ных чисел, а значит и сопутствующих им мощностей ничем не ограничен. И наконец для всех них доказывается положение, аналогичное вышеприведенному.

Когда благодаря известному завершению теории трансфинитных чисел начали обрисовываться основные контуры теории множеств, большинству математиков казалось, что анализ получил прочное, незыблемое обоснование. «Многие вопросы,—писал Рессель,—которые считались великими тайнами, например природа бесконечности, непрерывности пространства, времени и движения не подлежат в настоящее время ни сомнению, ни спору. Желающие изучить природу этих вещей должны обратиться к трудам людей, подобных Пеано или Георгу Кантору; они найдут там точное и несомненное изложение всех этих тайн». Классический анализ, где со времени Коши и Гаусса господствовало представление процесса, перехода к переделу, был растворен в теории множеств. Континуум уже не был чем-то становящимся, развивающимся, а наоборот, являл совершенное связанное множество, т. е. закономерно данную совокупность. Понятие непрерывности также было вложено в рамки бытия — множественности, поскольку функция $f(x)$ называлась непрерывной при $x=a$, если соблюдалось условие: для всякого положительного числа ε существует положительное число δ, обладающее тем свойством, что при всех значениях вещественного числа x, удовлетворяющих условию $(a-\delta<x<a+\delta)$, справедливо неравенство $[f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon]$. Правда, не была решена проблема континуума $(c=\aleph_1?)$ [1], но это затруднение, а с ним и другие (проблема упорядочивания) мало смущали математиков. Затруднение не есть противоречие, и этим все сказано. Математикам оставалось только перестроить здание своей науки в духе требований новых методологических установок. Но в самый разгар подобной перестройки анализа рядом последователей Кантора были вскрыты «странные» антиномии (противоречия) в теории множеств. Но что наиболее важно, это то, что факт их существования являлся следствием последовательного оперирования методологией Кантора. Так антиномия Бурали-Форти о множестве всех трансфинитных чисел базировалась на втором и первом принципах порождения, в свою очередь имеющими корень во взглядах Кантора на процесс познания. Антиномия Ришара проистекала из выводов Кантора об истинности и существовании математических понятий.

После того как были вскрыты затруднения и парадоксы учения о множествах, перед математикой открылись две возможности. Или, следуя Кантору, заняться дальнейшим анализом методологических предпосылок о множествах, имея целью снятие противоречий и затруднений помощью расширения этой методологии; или, пренебрегая парадоксами, преимущественно заняться затруднениями, коренящимися в понятии континуума. По первому пути пошли логисты во главе с Рёсселем, благо к периоду противоречий в системе Кантора представители формальной логики также сочли необходимым перейти

[1] $\aleph_1$ — символ мощности n-го класса трансфинитных чисел, a, c и f—символы мощности конкретных множеств: счетного, несчетного и множества всех функций.

от логики содержания к логике объема [1]. Второе направление, которое было столь же формальным и содержание которого выражалось аксиоматическим методом, возглавил Цермело. Но, как известно, ни те, ни другие противоречий и затруднений в системе Кантора не сняли, выдвинув, наоборот, целый ряд других не менее важных затруднений и противоречий.

Наступил период «смуты». Ни канторово определение множеств, ни аксиома Цермело—ничто уже не рассматривалось как нечто достоверное, данное [2]. Даже больше—Кронекером, Шатуновским и в особенности Пуанкаре был поставлен принципиальной важности вопрос: можно ли применять законы обычной (формальной) логики к бесконечному собранию вещей [3]. И тот же Пуанкаре дал примеры неприложимости законов обычной логики к бесконечным совокупностям [3]. Конечным же результатом этой борьбы было возникновение интуиционизма, который, не преодолев канторизма, формально противопоставил логике бытия столь же формальное становление. Но, как показала С. Яновская, только при поверхностном взгляде может показаться, что содержание интуиционизма принципиально отлично от содержания канторизма. На самом же деле интуиционизм и канторизм суть две разновидности идеалистической трактовки проблем методологии математики.

Таким образом в современной нам буржуазной методологии математики существуют два различных по форме, но одинаковых по своему идеалистическому содержанию направления в деле обоснования математики. Первое из них—канторизм—в ходе своего развития показало несостоятельность в деле обоснования математики; второе—интуиционизм—ежесекундно, ежечасно показывает ту же несостоятельность относительно самого себя.

Математика есть в основном наука о количестве. Иначе говоря, математика, как и прочие науки, изучает материальную действительность, беря в основу изучения «внешние», «безразличные» отношения материальной действительности. И как в материальной действительности некоторая форма «внешнего» не стоит в абсолютной обособленности как от «внутреннего», так и от других форм «внешнего», так и в математике каждое понятие не есть нечто независимое, отдельное, а дано в связи, во взаимозависимости с прочими понятиями. Не говоря уже о высшей математике, где связь всех понятий стоит вне всякого сомнения, достаточно сказать, что это положение целиком и полностью оправдывается в области элементарной математики — наиболее формальной ветви математических наук [4]. Ни положительное и отрицательное, ни целое и дробное, ни степень и

---

[1] Эта необходимость диктовалась характером тех затруднений, которые тяготели над формальной логикой.

[2] См. E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Cinq lettres sur la théorie des ensembles.

[3] См. N. Poincaré, Dernières pensées, chap. IV. La logique de l'infini. Есть рус. перевод.

[4] См. Энгельс, Диалектика природы, изд. 3-е, стр. 2, 36, 37, 58.

корень—ничто в ней не имеет смысла, а значит и существования без отношения к другому. Поэтому можно говорить о «существовании»[1] и истинности того или иного математического понятия только в свете его связи и взаимообусловленности с другими математическими понятиями, образующими вместе с ним ту или иную математическую ветвь как единое органическое целое.

«Истина есть целое. Но целое представляет собою сущность, осуществившуюся путем своего развития» (Гегель). Математические понятия не предрешены, не даны заранее, а возникают в процессе исторического развития математики как моменты развивающегося целого—единой, движущейся математики, все лучше и лучше отражающей в своем развитии реальные отношение внешнего мира. Так например возникновение понятия интеграла Римана связано с развитием понятия тригонометрического ряда, имеющего основой своего происхождения исследования Фурье о теплопроводности. Развитие же это носит противоречивый характер, в чем нетрудно убедиться на примере учений Больцано и Кантора. То, что было сегодня ложным, несуществующим, может завтра обратиться в отрицание, и как снятое выступит существующим и истинным. И, наоборот, существующее может перестать существовать, и непротиворечивость важна и характерна для «существования» истинности и развития математических понятий, а наоборот, важна противоречивость, ведущая и стимулирующая всякое развитие в природе, обществе, а следовательно и мышлении. Подтверждение этому—развитие понятия числа—интеграла, функции и т. д. и т. д. Иначе говоря, при анализе истинности того или иного математического понятия, помимо учета его взаимообусловленности с другими математическими понятиями, необходимо брать его в его историческом развитии, т. е. его возникновении, развитии и уничтожении. Но главное состоит не в этом. Если всякое математическое понятие есть развивающаяся во взаимообусловленности с целым—ветвь математики, к коей оно принадлежит, то значит в конечном счете его существование характеризуется истинностью этого целого, этой ветви. Эта же истинность имеет свой корень и выступает в свете развития и связи математики с прочими науками, в свете человеческой деятельности, т. е. в свете того, насколько правильно данная математическая ветвь отображает те или иные стороны материальной действительности. Практика и только практика, устанавливающая истинность математики и ее разделов, как целого, а отсюда уже и истинность отдельных математических понятий—вот что является в математике критерием истины. Внешнее же человеческой деятельности, позна-

[1] В действительности нужно говорить конечно не о «существовании понятия, а о существовании отражаемых им вещей, отношений или процесов и следовательно истинности данного понятия, его соответствия материальной действительности.

нию — непротиворечивость не может служить математике достаточным критерием истины. Поэтому, насколько «продуктивно» заниматься изысканием «вечной», «неизменной» системы обоснования математики, говорить совершенно не приходится. Всякую систему обоснования математики надо рассматривать как временную, как соответствующую состоянию науки и философии данного времени.

Могут возразить, что практика как критерий истины не дает возможности установить абсолютной истинности математических понятий и страдает неопределенностью. Возражающим можно ответить словами Ленина: «Конечно при этом не надо забывать, что критерий практики никогда не может по самой сути дела подтвердить или опровергнуть полностью какого бы то ни было человеческого представления. Этот критерий тоже настолько «неопределенен», чтобы не позволять знаниям человека превратиться в «абсолют» и в то же время настолько определенен, чтобы вести беспощадную борьбу со всеми разновидностями идеализма и агностицизма».

Из сказанного явствует, что первое, что должно подвергнуться беспощадной марксистской критике это — идеализм в системе Кантора, представляющий суть, ядро его учения. Поэтому нет необходимости останавливаться подробно на доказательстве того, что первая и вместе с тем чрезвычайно важная задача в деле критики канторизма эквивалентна марксистской разработке истории математики, поскольку только осознание истории математики позволит отчетливо ответить на вопросы как о содержании математики, так и о закономерностях ее развития. Но будет ли канторизм преодолен, если мы вполне осознаем процесс развития математики? Конечно нет. Канторизм есть результат идеалистически-метафизической реконструкции математики во второй половине XIX в. Поэтому полный разгром канторизма мыслим только на базе новой реконструкции математики. Реконструкция математики в целом — вот основное звено в деле преодоления канторизма и интуиционизма. Естественно, что поскольку эта задача еще не выполнена, особо важно выяснить, какие цели должны преследоваться нами при реконструкции математики и какими путями мы должны ее осуществлять.

Ряд товарищей понимали эти проблемы так: в деле обоснования математики канторизм и интуиционизм оказались несостоятельными. Поэтому необходимо новое, марксистское обоснование математики. Добиться же этого обоснования можно только путем внедрения материалистической диалектики в математику. Но на вопрос о том, как внедрять материалистическую диалектику в математику, эти товарищи или не могли ответить, или отвечали весьма туманно, указывая на необходимость одновременной работы как в области марксизма, так и в области математики, откуда как синтез должна была появиться марксистская математика. Точка зрения несомненно представляющая собою отраже-

ние меньшевиствующего идеализма на фронте математики и по отношению к деборинской «школе» вообще охарактеризованная т. Сталиным как метод ящиков. В одном ящике марксизм, в другом математика. От их соединения должна появиться марксистская математика.

Сказать только об этой необходимости «соединения» марксизма с математикой без намечения конкретных путей переработки математики на основе плана недостаточно. Конечно везде и всюду нужно указывать, что канторизм и интуиционизм в деле обоснования математики оказались несостоятельными. Нужно бороться против идеализма и идеалистических тенденций в математике. Нужно доказывать, что только внедрение материалистической диалектики в математику способно вывести ее из того тупика, в котором она находится. Наконец нужно всем марксистам-математикам заниматься работой как в области марксизма, так и в области математики. Но это нужно делать не только потому, что канторизм и интуиционизм потерпели крах, а потому, что вся эта работа является составным элементом в деле проведения марксистской реконструкции математики, необходимость которой диктуется запросами социалистического строительства.

Основная цель, которую мы должны преследовать при реконструкции математики, состоит в следующем: марксистская реконструкция математики должна иметь результатом такое развитие математики, при котором она с максимальной эффективностью была бы способна удовлетворять запросам социалистического строительства. Но для того чтобы осуществить подобную реконструкцию, нужно в первую очередь преодолеть тот разрыв, который существует между математикой и практикой социалистического строительства. Нужно в плановом порядке сконцентрировать математические силы на решении ряда актуальных проблем, выдвигаемых основными пунктами стройки материально-технической базы социализма, как например, металлургия энергетика, технические научно-исследовательские институты и т. д. Подобная плановая концентрация выдвинет в математике ряд новых проблем и тем самым послужит базисом для подлинно марксистской реконструкции математики. Углубление же связи математики с социалистическим строительством на основе плана и научно-правильного марксистского осмысливания всей работы в области математики, когда материалистическая диалектика сохраняет свою ведущую роль, приведет в конце концов к цели—к марксистской реконструкции математики—и тем самым к окончательному преодолению канторизма и интуиционизма. Надо только помнить, что это задача сегодняшнего дня, и что всякий математик, который подлинно хочет бороться против канторизма, который хочет заняться марксистской реконструкцией математики, должен отказаться от чисто словесной, книжной «реконструкции» математики и перейти на путь действительно марксистской, базирующейся на социалистическом строительстве ее реконструкции.

М. Я. Выгодский

О ПРИНЦИПАХ ПРЕПОДАВАНИЯ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ ВО ВТУЗЕ [1]

Мой сегодняшний доклад не претендует на то, чтобы охватить все вопросы связанные с постановкой преподавания математического анализа во втузе. Я хотел бы сосредоточить ваше внимание лишь на вопросе о п р и н ц и п а х построения курса анализа во втузе.

Разумеется, эти принципы должны вытекать из тех задач, которые стоят перед преподавателем математики. Мне придется поэтому начать свой доклад краткой характеристикой этих задач.

Совершенно очевидно, что студент втуза должен получить известную сумму сведений по математике для того, чтобы полученные сведения он мог применить как в своей практической работе, так и при изучении необходимых ему теоретических дисциплин во втузе и вне его. Отсюда вытекает, что студент втуза должен обучаться не только умению решать примеры на диференцирование или интегрирование, применяя выведенные правила и теоремы, но и умению п р и л а г а т ь свои технические навыки к решению конкретных вопросов.

Это положение как будто бы совершенно бесспорно, но к сожалению на практике осуществляется далеко не всегда. Наша учебная литература отражает то положение, которое и поныне сохраняется во многих местах. Возьмем для примера «классический» учебник Гренвиля, чрезвычайно распространенный у нас. Вы не найдете там ничего, кроме цепи теорем анализа и диференциальной геометрии.

Правда, мы имеем учебники и другого типа, например книгу Г. М. Фихтенгольца «Математика для техников». Но я думаю, что не ошибусь, если скажу, что в практике нашего преподавания стиль Гренвиля, если и не преобладает, то во всяком случае широко распространен.

Среди тех возражений, которые можно услышать против насыщения курса математики конкретным материалом, одно кажется на первый взгляд убедительным. Оно было недавно высказано и в этих стенах проф. Шпильрейном в его выступлении на диспуте по вопросу о преподавании математики во втузах. Это возражение состоит в том, что при решении задач конкретного содержания студенту обычно не ясна именно конкретная сторона вопроса, и приходится тратить очень много времени, чтобы ее разъяснять. Такая потеря времени

---

[1] Доклад, прочитанный на заседании Общества физиков и математиков материалистов 3 мая 1930 г.

является непроизводительной по мнению товарищей, которые придерживаются этого взгляда. Но с таким возражением я согласиться не могу. Если бы и в самом деле так много времени уходило на то, чтобы разъяснять условия задачи по существу, то и тогда это необходимо было бы сделать, потому что без решения задач такого рода, по моему глубокому убеждению, не может быть усвоена и математическая теория. Но если даже допустить противное, если допустить, что студент усвоит—именно усвоит, а не заучит—теоретическую схему, то такое усвоение для него бесполезно, если в применении теории он окажется беспомощным. Сплошь и рядом мы можем наблюдать, что студент, бегло решающий примеры на упражнениях по математике, не может разобраться в тех даже несложных с математической стороны выкладках, которые встречаются ему в курсе физики. Происходит это потому, что он хорошо интегрирует, но плохо знает, что такое интеграл (хотя и может дать книжное определение интеграла). Разумеется, мы не должны углубляться в подробности дисциплины, еще плохо известной или вовсе неизвестной студенту. Преподаватель математики должен ограничиться теми простейшими задачами, которые позволят студенту научиться мыслить математическими понятиями в сфере их приложений, научиться работать с их помощью. И вот подходящим выбором этих задач можно добиться и того, чтобы разъяснение физической стороны дела заняло уже не так много времени. Можно решить несколько десятков задач, условия которых достаточно элементарны с точки зрения фактического материала, для понимания которых достаточно немногих сведений, не выходящих или едва выходящих из рамок элементарного курса физики и механики. Таковы например задачи на вычисление центров тяжести, моментов инерции, давления жидкости, сопротивления проводника, механической работы, силы притяжения, продолжительности химической реакции, продолжительности истечения жидкости из сосуда и т. д. и т. д.

Еще одно замечание относительно задач геометрического характера. Конечно и геометрическая задача есть задача конкретная по отношению к анализу, но только тогда эта конкретность осознается студентом, когда он сам находит ту или иную формулу, решающую проблему. Задачи же, в изобилии фигурирующие в задачниках, вроде задач об определении наклона кривой или кривизны по данному уравнению линии, при решении которой учащийся должен пользоваться готовой формулой, не являются конкретными для студента. Это просто пример, решение которого дает только упражнение в технике дифференцирования и запоминание формул. Гораздо ценнее, если учащийся выводит эту формулу в виде задачи, хотя бы для частного случая. Так, определение длины дуги кривой — это задача, которая может быть решена студентом самостоятельно для случая например полукубической параболы, после чего нетрудно вывести и общую формулу.

Что нужно сделать для того, чтобы студент без помощи преподавателя или при его лишь наводящих указаниях

мог подобную задачу решить, — об этом я буду говорить в своем докладе.

Но во избежание всяких недоразумений я должен сделать еще одну оговорку. Уже из приведенного примера вы можете видеть, что я, возражая против преподавания математики как самодовлеющей дисциплины, отнюдь не склонен разделять мнения тех, кто считает, что студент втуза должен изучить ряд формул, которые он сможет применять в нужных ему случаях, пользуясь преподанным рецептом. Такого рода «практицизм» я считаю не менее, а может быть, и более вредным, чем преподавание математики в стиле Гренвиля.

Это — преподавание математики по Ахмесу или Герону: «делай так». Такое преподавание было вполне уместно в фараоновском и птоломеевском Египте с его традиционным укладом техники ремесла, но оно совершенно непригодно в стране строящегося социализма, где происходит невиданная и неслыханная в истории реконструкция народного хозяйства. Даже самый узкий специалист, каких нам нужны сотни тысяч, не может быть ремесленником, и потому с тенденцией обучать его ремесленным методам мы должны бороться самым энергичным образом.

Математика во втузе, как бы ни был велик объем сообщаемых студенту сведений, должна быть теоретической дисциплиной. Это нисколько не противоречит тому положению, ранее мною высказанному, что курс математики должен быть насыщен конкретным материалом.

Теория, оторванная от практики, не есть теория. Наиабстрактнейшие теоретические дисциплины в конечном счете связаны с практикой, но эта связь очень сложна и тонка. Своеобразие задачи преподавания математики во втузе состоит в том, что мы должны сделать эту связь ясной начинающему, и именно потому мы должны отказаться от того, чтобы начинать с изложения теории в такой ее форме, которая является продуктом долгого исторического развития.

Здесь мы и подходим к основной теме доклада.

Понятно стремление преподавателя, вводя студента в математику, поднять его на возможно более высокую ступень теоретического развития науки. Однако такое изложение, перепрыгивая через целый этап развития научной мысли, затрудняет для учащегося процесс выкристаллизования теории из практики, а следовательно делает более трудным и приложение теории к практике.

Я думаю, что это общее положение вряд ли вызовет возражения и вряд ли среди присутствующих найдутся сторонники того взгляда, что изложение анализа во втузе должно базироваться например на теории множеств или что следует изложению анализа предпосылать учение о вещественном числе, хотя без сомнения лишь такой путь удовлетворял бы современным требованиям строгости.

Но если в принципе это положение неоспоримо, то встает вопрос: где же лежит водораздельная линия между теми элементами

теории, которые должны быть введены в курс анализа, и теми ее элементами, которые должны остаться за рамками курса.

Почему мы с легким сердцем игнорируем теорию вещественного числа, без которой, строго говоря, мы не можем утверждать существование предела сходящейся последовательности? Потому что эта теория не вносит в анализ нового содержания, она не обогащает творческих методов его. Правила дифференцирования и интегрирования и применение анализа к вопросам практики остаются теми же, какими они были до Дедекинда и Кантора, т. е. до 70-х годов прошлого века. Теория вещественных чисел существенна не для построения анализа, а для его логического обоснования.

Мы должны ясно различать эти две вещи: построение теории и ее формальное, логическое обоснование. Настаивая на том, что математика во втузе должна быть теоретической дисциплиной, я вместе с тем со всей силой выставляю положение, что она не должна быть дисциплиной формально-логической; вопросам формального обоснования может быть посвящено внимание (в меру возможности, разумеется) лишь после того, как учащимся усвоена суть дела. Таков был и исторический путь развития науки. Так как всякая наука, и математика в том числе, возникает из потребностей практики и развивается в связи с последней, то естественно, что конкретные задачи давали математике реальное содержание, и логические связи вскрывались прежде всего на реальном субстрате. Реальное содержание математических понятий — вот источник так называемой математической интуиции, вот источник установления связей между понятиями математики, источник правил математических операций.

Установление формальных связей, т. е. формальное обоснование математики, следует за построением теории и часто отделено от последнего десятилетиями и даже столетиями[1].

Так обстоит дело с исторической стороны, с педагогической же стороны всякое неоправданное формализирование встречает инстинктивное сопротивление психики учащегося и не помогает, а затрудняет ему усвоение реального содержания, скрывающегося за формальной схемой.

Я думаю, что и это положение принципиально не будет оспариваться. Но вот в вопросе о конкретизации этого положения я боюсь встретить с вашей стороны возражения. Между тем то, о чем я собираюсь сейчас говорить, есть лишь последовательное проведение в жизнь повидимому бесспорных положений.

Почему мы не считаем нужным, более того—считаем ненужным (я бы сказал вредным) строить учение о пределах на базе теории вещественного числа? Потому что теория вещественного числа есть лишь формальная теория, задачей которой является логи-

[1] Строго говоря, всякий логический процесс требует некоторого реального содержания, и в вопросе о логическом обосновании речь может итти только о сведении этого реального содержания к возможному минимуму,— но это вопрос, который мы можем в наших целях оставить без рассмотрения.

ческое оправдание анализа, а не его теоретическое построение; потому что арифметическая теория вещественного числа представляет собой историческое наслоение, лишь формально лежит в «основании» анализа, а по существу венчает известную стадию его развития.

Вот почему преподаватель математики со спокойной совестью проходит мимо теории вещественного числа — и поступает совершенно правильно.

Но если такое отношение установилось в виде молчаливого согласия по отношению к теории вещественного числа, то совершенно иначе обстоит дело с теорией пределов. Я вероятно не ошибусь, если скажу, что среди здесь присутствующих профессоров и преподавателей математики не найдется может быть ни одного, кто считал бы возможным вводить учащихся в анализ иным путем, чем через теорию пределов.

И все же я возьму на себя смелость утверждать, что теория пределов не есть тот «царский путь», по которому учащийся должен войти в основные понятия и операции анализа.

Прежде всего теория пределов является в отношении к тем элементам анализа, которые мы даем студенту (о них у нас только и идет речь), не творческой, не конструктивной теорией, а теорией формальной, назначение которой состоит в том, чтобы оправдать построения анализа, сделать последний формально непротиворечивым. Так же, как и теория вещественного числа — теория пределов венчает определенную ступень развития теории и лишь формально ее «обосновывает». Разница только в том, что теория вещественного числа есть более высокое напластование: она лежит над теорией пределов, формально будучи под нею.

Теория множеств пластуется еще выше, над (соответственно — под) теорией вещественного числа.

Такова структура математического анализа, взятая с логической стороны. Таков и исторический путь его развития.

Почему же, снимая два верхних пласта, мы должны оставить третий, более глубоко лежащий? Какие мотивы служат причиной того, что теория пределов так прочно и неразрывно связывается со всяким, даже с самым элементарным построением курса анализа?

Я постараюсь ответить на этот вопрос, касаясь лишь важнейших, существеннейших моментов.

Прежде всего каждый пласт научной теории не лежит мертво на предыдущем. Между ними происходит взаимодействие: говоря фигурально, происходит некоторого рода диффузия между ними. Достаточно для примера указать на роль теории множеств в деле обобщения понятия интеграла. Активное воздействие верхнего пласта на нижележащие сказывается, разумеется, в более высоких областях науки и имеет огромное значение для построения науки как целого. Но, разумеется, и по Лебегу и по Лейбницу интегралы элементарных функций имеют одно и то же значение и, разумеется, никто не собирается вводить в курс втуза определение интеграла по Лебегу. Но тогда, какие основания заставляют излагать теорию интегралов по Коши?

Дело здесь вот в чем: теоретическая концепция Коши (т. е. точка зрения теории пределов) пустила гораздо более глубокие корни в толщу математического анализа. Она, можно сказать, уже завершила свое развитие, ее активное воздействие на анализ уже исчерпано и может быть систематически представлено. Это вполне понятно, ибо и исторически и логически эта теория венчает Sturm- und Drang-period развития математической мысли — героическую эпоху от Кеплера до Эйлера.

По сравнению с ней построения XVIII в. представляются нам наивными; она разрешает ряд парадоксов бесконечности классического анализа.

Все эти обстоятельства не могут не соблазнить нас начинать изучение анализа с теории пределов. И нет сомнения, что мы этим становимся на почву, логически более прочную и обеспеченную.

И все же мы поступаем в этом случае неправильно. Мы перепрыгиваем через большой этап развития математической мысли. Пусть это этап наивного мышления, но это тот этап, на котором единственно возможным было то накопление научного материала, которое обусловило возможность создания современного анализа.

На этом этапе развития математической мысли речь идет не о пределе отношения безгранично уменьшающихся величин и не о пределе их суммы, а об отношении бесконечно-малых величин и о сумме бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых. И «неделимое» Кавальери, и «момент» Ньютона и «дифференциал» Эйлера представляют собой такие бесконечно-малые величины. Тот факт, что, оперируя бесконечно-малыми величинами как некоторыми «актуальными» величинами, мы вступаем на путь формальных противоречий с арифметикой, — этот факт не был секретом ни для Кеплера, ни для Кавальери, ни для Эйлера. Алгоритм исчисления бесконечно-малых должен был искать себе оправдания; но в то время как Коши и ряд предшествовавших ему математиков (в их числе д'Аламбер и, как мы увидим, отчасти Ньютон) искали этого оправдания в формальном обосновании — большинство крупнейших математиков XVII и XVIII вв. апеллировали к содержательному истолкованию этого алгоритма, опирались на геометрические, механические и физические прообразы математической бесконечности. На этом пути человеческий ум овладевал теорией. Именно овладевал, потому что точка зрения теории пределов на этой ступени развития является не творческой, не активной.

По этой же причине и для студента, приступающего к изучению анализа, точка зрения теории пределов, представляясь безупречной (каковой она в действительности не является!) с логической стороны, была, есть и будет мертвой, неактивной. Студент понимает ее, но понимает как нечто чужое; он относится к ней созерцательно, в лучшем случае осмысливая, но не усвоивая себе предмета, не будучи способным без духовных помочей сделать ни единого шага вперед к получению существенно новых результатов.

Может быть скажут, что это клевета на нашего студента. Может быть скажут, что я тащу назад, к давно пройденному этапу, что я пред-

лагаю преподносить пролетарскому студенчеству не науку, подлинную науку, а разжиженную кашицу, популярную похлебку.

На это я мог бы сказать, что наука нужна пролетариату как оружие, а не как кладезь книжной премудрости. Студент наш должен ее методом овладеть, а не ограничиться пассивным «пониманием». А для этого, прежде чем что-либо «обосновывать», он должен активно усвоить то, что подвергается обоснованию. Только тогда ему будет ясна необходимость обоснования и появится потребность с этим обоснованием знакомиться.

Изучение истории математики открывает нам и пути подхода к ознакомлению с математическими фактами. Это конечно не означает, что мы должны копировать каждый исторический шаг. Сначала обогащение «фактического» материала, а затем укладывание его в логическую схему — вот тот общий принцип, который мы должны конкретно проследить исторически и в общих чертах повторить педагогически.

Я предвижу еще такое возражение. Могут сказать, что новые и даже новейшие открытия в области науки делают излишним и ненужным прохождение длинного и извилистого исторического пути; что со времени Эйлера теория пределов стала настолько доступной и простой, что никаких затруднений причинить не может; что прогресс педагогики делает возможным связать понятие предела с такими конкретными образами, как скорость, наклон касательной и т. д., и что поэтому мы можем изучать именно фактический материал, не прибегая к «туманным» и «противоречивым» понятиям, вроде понятия бесконечно-малой величины как таковой (а не как бесконечно «умаляющейся»). Это возражение было бы верно лишь наполовину.

Бесспорно, что целый ряд исторических этапов становится лишь достоянием истории. Бессмысленно было бы например учить школьника римской нумерации или действиям с шестидесятиричными дробями. Мы можем и должны начинать с арабской нумерации и с десятичных дробей, потому что эти «новые» методы совершенно упраздняют старые.

Но так ли обстоит дело с теорией пределов? Можно ли сказать, что создание нового метода пределов позволяет с легким сердцем вовсе откинуть «старый» метод бесконечно-малых? [1]

---

[1] Во избежание недоразумений еще раз замечу, что, говоря о величине бесконечно-малой, я здесь и в дальнейшем не имею в виду переменную величину, стремящуюся к пределу нуль. На вопрос, что же такое есть бесконечно-малая величина в том смысле, в каком я употребляю этот термин и в каком он употреблялся в математической литературе XVII—XVIII вв. — на этот вопрос я могу ответить следующее:

Если вы хотели бы получить формальное определение бесконечно-малой величины, то вряд ли кто-нибудь сможет его дать, ибо операции над бесконечно-малыми величинами безусловно не подчинены формальной логике. Формальные противоречия в исчислении бесконечно-малых несомненно существуют, они-то и являются, если так можно выразиться, «душой» этого исчисления.

Поэтому дать формально строгое определение бесконечно-малой величины нельзя, но оно и не нужно, ибо определение вовсе не является творческим началом в процессе образования понятия. Понятие бесконечно-малой величины создается

Я думаю, что утверждать это было бы ошибочно.

В самом деле, прохождение через «наивный» этап развития математической мысли позволяет учащемуся с большей легкостью и гораздо скорее применять анализ к вопросам естествознания, техники и даже «чистой» геометрии, чем это возможно при обычном введении его в круг основных понятий анализа через теорию пределов. Происходит это потому, что внимание учащегося устремлено непосредственно на суть дела и не отвлекается в сторону формального обоснования. Как бы ни была «популярно» изложена теория пределов, она не может не усложнять, особенно на первых порах, творческого овладения методом бесконечно-малых. Она порождает ряд трудностей именно тогда, когда мы от логической схемы пределов, довольно несложной самой по себе, переходим к ее применению in concreto.

В чем состоят для студента эти трудности — об этом я скажу подробнее немного позднее. Сейчас же я хотел бы указать на некоторые исторические обстоятельства, весьма поучительные по моему мнению.

Идея предела, как я уже указывал, не является открытием Коши или д'Аламбера, хотя можно сказать, что лишь со времени Коши она становится универсальным аппаратом анализа.

Еще в 80-х годах XVII в. Ньютоном был создан формальный аппарат, эквивалентный теории пределов. Я говорю о «методе первых и последних отношений», который был изложен Ньютоном в знаменитом его труде «Математические начала натуральной философии»,— и не только изложен, но и положен в основу всех его построений.

Я не буду останавливаться на очень интересном вопросе о принципиальных отличиях метода «последних и первых отношений» от метода пределов.

С точки зрения теоретико-познавательной они имеют большое значение, но для формальной стороны дела они не существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно открыть первую книгу «Математических начал натуральной философии» в русском переводе проф. Крылова. Переводчик просто заменил термин «ultima ratio»— последнее отношение — словом «предел», от чего математическая сторона дела нисколько не пострадала.

Этот формальный аппарат Ньютон и применяет в «Началах». Но нам достоверно известно, что получал он эти результаты другим методом, методом «моментов», т. е. диференциалов. Ньютон не решился на то, чтобы изложить свои результаты этим же методом,

---

у учащегося в результате рассмотрения таких конкретных задач, в которых «практически» можно пренебречь той или иной величиной. Идеализация этого процесса пренебрежения приводит к понятию бесконечно-малой величины, которое сразу же получает относительный характер. У учащегося не возникает поэтому опасений в том, что, пренебрегая бесконечно-малыми величинами, мы получаем практически неверный результат, но, разумеется, у него возникает потребность узнать, как же обстоит дело с формальной стороны, почему же результат получается не приближенно верным, а «абсолютно верным». Отвечая на эти вопросы, мы знакомим его с теорией пределов, которая становится таким образом не исходным пунктом, а формализующим моментом теории, как это и было в действительной истории науки.

и это было главнейшей причиной того, что не он, а Лейбниц создал новую школу, новое мощное течение математической мысли в Европе.

Идеи Ньютона в этой логически более совершенной форме, в которой он их изложил, в форме, принципиально совпадающей с современной, остались непонятыми. И причиной здесь было совсем не то, что Ньютон плохо разъяснил понятие «последнего отношения». Истинной причиной является то, что в эпоху Ньютона был нов фактический материал анализа, и для разработки его нужен был метод «неделимых», «моментов» или «диференциалов»[1]. В эпоху же Коши этот материал был уже накоплен, и тогда логическая перестройка анализа не заставила себя ждать.

Я спрашиваю, в какой стадии развития застаем мы студента первого курса втуза? В какую эпоху, выражаясь фигурально, он живет математически? Безусловно, в эпоху Ньютона, а не Коши. Продолжая сравнение, можно сказать, что переход к эпохе Коши может быть очень ускорен, столетия могут измеряться месяцами, ибо из материала, накоплявшегося веками, мы делаем своего рода экстракт и питаем им студента. Но тем более следует заботиться о том, чтобы рациональное питание сделало возможным быстрое преобразование пищеварительных процессов, чтобы не получить при этом хронического заболевания желудка студента.

Почему мы должны ждать от среднего студента втуза, что он перепрыгнет через ту ступень, через которую не мог перепрыгнуть Ньютон? Если на это скажут, что два с половиной столетия, отделяющие нас от «Начал», поднимают нас на такую высоту, с которой кругозор среднего человека больше, чем кругозор гиганта на равнине, то на это можно ответить, что через сто лет после появления «Начал» математика поднялась на необычайную высоту, и это не помешало гиганту Эйлеру строить и излагать анализ, пользуясь методом бесконечно-малых.

Вот те исторические обстоятельства, над которыми следует призадуматься и оценить которые можно вполне лишь тогда, когда мы попытаемся отрешиться от традиционных методов, на которых мы воспитаны.

Я покажу теперь, в чем состоят фактически те трудности, которые возникают при этом традиционном изложении у студента и которые по существу совпадают с мотивами, заставившими классиков математической мысли итти по пути метода бесконечно-малых.

---

[1] Повидимому Ньютон был внутренне убежден в том, что метод «моментов» является не только эвристическим методом, но и методом изложения; по крайней мере, чтобы обеспечить себе приоритет этого открытия, он во второй книге «Начал» (Лемма II.), т. е. после того как наиболее плодотворное поле применения этого метода (I книга) было сознательно обработано методом пределов, определяет момент как мгновенное приращение количества и устанавливает теорему, которую можно записать так:

момент $(AB)=A$ (момент $B)+B$ (момент A), т. е.

$d(AB)=BdA+AdB$ $(AB)=A\cdot dB+B\cdot dA$.

Заметим, что для доказательства этой формулы Ньютон, чтобы не производить откидывания произведения $dA\cdot dB$, прибегает к искусному приему, вызывающему негодование Гегеля, и потребовавшемуся для того, чтобы избежать формальных возражений.

Напомню, что мы с вами условились в том, что изложение теории у нас не должно быть оторвано от практики, что с о д е р ж а н и е теории должно раскрываться на конкретном материале.

Так, кстати сказать, совершалось развитие теории и исторически. Проблемы физики, астрономии, механики и техники служили исходными пунктами не только возникновения, но и развития анализа в XVII и XVIII вв.

Итак положим, что мы с вами дали учащемуся понятие определенного интеграла, исходя из конкретного примера, скажем, из площади. Теперь, если мы хотим обобщить это понятие, мы должны немедленно показать, в каких еще других областях мы встретимся с интегралом. И вот мы берем какой-нибудь пример из физики, например вычисляем давление воды на прямоугольную вертикальную стенку сосуда, высота которой h *см*, а основание a *см*. Станем на точку зрения бесконечно-малых. Тогда решение этой задачи очень просто, и студент после наводящих указаний решает ее так: возьмем на глубине x бесконечно тонкую горизонтальную полоску шириной dx, давление на нее можно считать всюду постоянным и равным $axdx$, после чего, суммируя все давления, мы получаем интеграл $\int_0^h axdx$,

Так обстоит дело в том случае, если говорить о величинах бесконечно-малых, суммой которых является наш интеграл. Кстати, на вопрос, какую полоску мы можем считать бесконечно тонкой, мы можем дать очень простой ответ: ту, которую мы можем считать находящейся всюду под одинаковым давлением воды.

Если же мы на бесконечно-малую величину будем смотреть как на переменную, стремящуюся к нулю, а под интегралом будем разуметь п р е д е л суммы $\Sigma ax_{i,i-1}(x_i - x_{i-1})$ — и ничего больше, — если мы еще вдобавок, по примеру Гренвиля, объявим решительную борьбу против концепции бесконечно-малой величины как таковой, тогда мы поставим студента, решающего эту задачу, в гораздо более трудное положение. В самом деле, как обычно излагается решение такой задачи? Каким образом появляется здесь п р е д е л, наличие которого совершенно не дано самим условием задачи?

Обычно рассуждают так:

Давление воды на тонкую горизонтальную полоску длиной a и шириной Δx равно п р и б л и ж е н н о $ax\,\Delta x$. Следовательно давление на всю стенку приближенно равно $\Sigma ax\,\Delta x$; чем меньше будет Δx, тем точнее мы получим величину давления, а потому п р е д е л этой суммы, т. е. интеграл даст точное значение давления.

Это рассуждение как будто бы не так сложно; беда только в том, что оно по сути дела необосновано ни с математической, ни с физической стороны.

С математической точки зрения дело обстоит так: выражение $\Sigma ax\,\Delta x$ имеет своим пределом $\frac{ah^2}{2}$; прекрасно, но почему этот предел дает величину давления жидкости на стенку? Ведь $\Sigma ax\,\Delta x$ есть лишь приблизительная величина давления на полоску, какую-то ошибку мы

при этом делаем. Эта ошибка при увеличении числа полосок как будто даже возрастает, по крайней мере ничем заранее не исключена возможность такого возрастания.

Здесь можно просто обойти вопрос, приняв на веру, в качестве «очевидного» факта, что не только каждая ошибка стремится к нулю, но и сумма их также имеет пределом нуль. Но тогда вся теория пределов обращается в артиллерию, обстреливающую воробьев, потому что теория не выполняет как раз той роли, для которой она придумана — роли строгого контролера. Более того, тогда концепция бесконечно-малых величин будет более безупречной, чем концепция предела. В самом деле, если я имею право пренебрегать изменением давления в пределах высоты Δx, то я вправе считать сумму бесконечно большого числа слагаемых точной величиной давления на стенку; но, когда я подчеркиваю, что ошибка, совершаемая при вычислении давления на тонкую полоску, есть переменная величина, нулю не равная, но к нулю только стремящаяся, тогда я совершенно не вправе без доказательства утверждать, что переменная величина суммы ошибок, нулю не равная, тоже стремится к нулю как к пределу.

Если же мы будем доказывать это утверждение, то — с этим вы должны согласиться — задача сильно усложняется, а усложнение этой и целого ряда других подобных задач безусловно мешает учащемуся ухватиться за корень вопроса, творчески усвоить основную мысль метода.

Но этого мало. Жонглирование математическими выкладками не только затемняет, но и искажает физическую картину явления,

В самом деле, переход к пределу с физической стороны является совершенно неправомерным. Если вы безгранично увеличиваете число полосок, то на определенной стадии разбиения ни для одной пластинки не будет верен закон Паскаля, и величина $axdx$ не даст вовсе даже и приближенного значения давления на полоску. Таким образом самый предел суммы может представлять давление лишь приближенно, и поэтому мы вовсе не нуждаемся в предельном переходе.

Вообще «бесконечно-малая» величина в физике есть не только достаточно малая, но вместе с тем и достаточно большая величина, т. е. вообще никоим образом не стремящаяся к нулю.

Если вы предлагаете задачу на вычисление скорости унимолекулярной реакции и обозначаете через a начальное количество молекул вещества, через x—число молекул, вступивших в реакцию, и пишете, что скорость $v = k(a - x)$, то рассматривать скорость v как предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ вы не имеете никакого права, ибо величина Δx уж во всяком случае не меньше единицы, более того — для одной, двух и трех молекул закон $v = k(a - x)$ вообще не верен; он верен только тогда, когда $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где Δx не слишком малое число молекул.

Эти затруднения носят, как видите, как педагогический, так и методологический характер. Они устраняются, если вы с самого начала расчленяете вопрос. На первой стадии вы подходите к бесконечно-малой величине, как к такой, отбрасывание которой в известных случаях (поясняете в каких) не влияет существенно на результат. На второй стадии вы переходите к абстрактному оформлению получаемых свойств и, задаваясь вопросом, как идеализировать изученный фактический материал, знакомите учащегося с теорией пределов.

Очень часто мы видим, что, когда решаются задачи вроде тех, которые я привел в виде примера, то фактически применяются такие рассуждения, которые по существу представляют апелляцию к бесконечно-малым. Так например у Гренвиля[1] мы читаем: пусть в элемент времени dt вытекает объем dQ воды и т. д.; рассуждения ведутся все время с этими диференциалами dt, dQ, dx и, когда получается выражение dt через dx, то t вычисляется как интеграл, причем ни единого слова не сказано о переходе к пределу и нигде прежде не оговорена правомерность такого рассуждения.

И это после того, как на протяжении $1^1/_2$ тома учащемуся твердили, что dx не есть какая-нибудь определенная величина, что производная не есть отношение бесконечно-малых приращений и т. д.

Здесь происходит такой процесс: сначала обламывают мозги студента, приучая его быть «осторожным», не забывать, что $\frac{dy}{dx}$ есть только удобный символ и т. д., а затем студент должен вновь переламывать себя, чтобы фактически употреблять «удобный символ» как ньютоновский момент. При том методе, который я защищаю, этого не получается, на символы $dx, \frac{dy}{dx}, \int_a^b y dx$ и т. д. студент смотрит сначала как на ничтожно малую величину, отношение двух таких величин, сумму чрезвычайно большого числа чрезвычайно малых слагаемых — и это дает ему возможность узнавать в конкретной задаче овеществление этих символов. Некоторое недоверие, являющееся результатом приобретенных в школе метафизических взглядов на число, рассеивается очень быстро, когда студент, во-первых, знакомится с рядом физических «моделей», служащих прообразом математической бесконечности и, во-вторых, убеждается в том, что при помощи теории пределов можно post factum формально оправдать проделанные вычисления.

Мне приходилось слышать от физиков, изучавших в университете курс математики, что проходило много времени, прежде чем они научались «физически» осмысливать диференциалы и интегралы, и для этого им приходилось в известной мере вытеснять то, чем были начинены их головы во втузе. Я думаю, что для инженера это еще в большей мере верно.

Оперирование бесконечно-малыми величинами дает возможность студенту ориентироваться не только в области приложений

[1] Гренвиль, Элементы диференциального и интегрального исчисления, т. II, стр. 135.

математики, но и в самой математике. В ряде случаев на этом пути можно достигнуть гораздо большей ясности, наглядности и вместе с тем краткости изложения. Более того, самое формальное доказательство воспринимается совершенно иначе, после того как ему предпослано «наивное» решение проблемы.

Если мы определим соприкасающуюся плоскость пространственной кривой как предельное положение плоскости, проходящей через три ее точки, а характеристику семейства поверхностей — как предельное положение линии пересечения двух поверхностей семейства, то задача нахождения характеристики семейства соприкасающихся плоскостей представится довольно трудной для решения. Во всяком случае она в курсах дифференциальной геометрии занимает немало места. Но эта же задача решается буквально в двух словах, если мы определим соприкасающуюся плоскость как плоскость, проходящую через три бесконечно близкие точки кривой, а характеристику семейства поверхностей — как линию пересечения двух бесконечно близких поверхностей этого семейства. Именно мы рассуждаем так:

Соприкасающаяся плоскость ABC проходит через три бесконечно близкие точки кривой A, B, C; бесконечно близкая к ней соприкасающаяся плоскость BCD пройдет через точки B, C и D, так что точки B и C принадлежат обеим бесконечно близким плоскостям. Следовательно прямая BC есть линия пересечения этих плоскостей, т. е. характеристика. Но прямая BC, проходя через две бесконечно близкие точки кривой, есть касательная к кривой. Итак искомая характеристика есть касательная.

Здесь суть в том, что соприкасающуюся плоскость мы не рассматриваем как предельное положение, в котором исчезает различие точек A, B, C, напротив, мы продолжаем видеть их различие; мы рассматриваем не «пустое» тождество, а тождество, которое есть в то же время и различие.

Не составляет никакого труда сделать это рассуждение формально строгим, но именно в приведенной форме оно открывается, творится. Человеку, который научился мыслить образами бесконечно-малых, нетрудно решить эту задачу; человек, воспитанный на односторонней формальной схеме, за этой формальной схемой рискует не увидеть содержания.

Приведенный пример относится к области дифференциальной геометрии. Чтобы привести другой пример из анализа, я сошлюсь на теорему Тейлора. Вывод ее при помощи остаточного члена носит настолько искусственный характер, что перестает быть убедительным. Вывод методом неопределенных коэфициентов несколько менее искусственен, но зато нестрогий и все-таки оставляет впечатление фокуса. Если не брезгать бесконечно-малыми величинами, то теорема Тейлора получается совершенно естественно переходом к интерполяционной формуле Ньютона от конечных разностей к дифференциалам. После этого будет понятно и вычисление остаточного члена.

Мне кажется, принципиальную сторону дела я изложил с достаточной полнотой.

Мне остается сказать несколько слов о практическом осуществлении этих идей. Здесь я имею сравнительно небольшой опыт, — в течение пяти лет я стараюсь выработать наиболее подходящий способ изложения материала. Я должен сознаться в том, что каждый год я меняю целый ряд важных деталей и отнюдь не могу поручиться за то, что нашел наилучший путь. Таким образом позвольте мне пока предложить то, что у меня есть.

Опыт вскоре убедил меня в том, что интегральное исчисление (именно понятие о п р е д е л е н н о г о интеграла) должно служить исходным моментом в построении курса. Прежде всего, понятие интеграла более доступно в силу большей конкретности, осязаемости тех образов, из которых мы исходим. Площадь — более наглядное понятие, чем угловой коэфициент. Нахождение пути по скорости представляется не менее простым, чем скорости по пути. Но главное это то, что открывающееся поле применимости гораздо богаче п о с о д е р ж а н и ю; если начинать с диференциального исчисления, мы должны сидеть на приложении одного общего правила к различным вариантам двух тем: нахождению скорости и наклона. Пресловутые задачи на максимум и минимум конечно к о н к р е т н ы, но соприкосновение с конкретным материалом ограничивается элементарно-алгебраическими подсчетами; диференцирование же совершается совершенно м а ш и н а л ь н о, без отношения к условию задачи. Интегральное же исчисление может быть сразу же применено к решению разнообразных задач, в каждой из которых подинтегральное выражение составляется с у ч е т о м конкретных условий задачи. К решению конкретных задач мы приступаем после трех или четырех 2-часовых занятий, посвящаемых выяснению общих понятий, выводу формул, разбору типичных задач и упражнений в числовом интегрировании.

Разумеется, класс интегрируемых функций пока еще ограничен, но вполне достаточен для решения задач.

В процессе решения этих задач понятие д и ф е р е н ц и а л а получает конкретное овеществление, после чего задача диференциального исчисления может быть сформулирована как задача разыскания уравнения, связывающего диференциалы, по уравнению, связывающему переменные.

Поводом для постановки такой задачи может служить например вопрос об изменении переменной интеграции.

Правила диференцирования простейших функций выводятся довольно быстро и вместе с теоретическими пояснениями и упражнениями занимают два-три занятия. Конкретное применение они находят не только при нахождении скорости, углового коэфициента и оценки погрешности, но и в вычислении интегралов методом подстановки [1].

[1] Я предполагал дать более детальный обзор своего курса в особой статье (в докладе я не мог этого сделать за недостатком времени). Но ввиду того, что эта статья по независящим от меня обстоятельствам появляется в печати с большой задержкой, надобность в подробном обзоре отпадает, так как в ближайшем времени выйдет моя книга «Основы исчисления бесконечно-малых», где интересующиеся найдут методическое осуществление принципов, развитых в докладе.

Далее изучается связь операций диференцирования и интегрирования, и здесь вводится понятие неопределенного интеграла как функции, имеющей данный диференциал, а также разъясняется, что неопределенный интеграл можно рассматривать как определенный интеграл с переменным верхним пределом.

После этого развитие техники диференцирования и интегрирования идет параллельно друг другу.

Что касается диференциальных уравнений, то они не выделяются в особый отдел, поскольку мы решаем лишь задачи, разрешающиеся разделением переменных.

В таком порядке развертывается теоретический материал: упражнения делятся пополам — на решение примеров и задач.

Мне не приходилось вести большого курса математики. На химфаке МВТУ (ныне ВХТУ), где я сейчас преподаю, я имею одногодичный курс при 200 годовых часах. Конечно мы можем лишь чуть-чуть выйти за пределы того, о чем я вам рассказывал.

Оправдывал ли себя этот метод преподавания? Насколько я могу судить — да. Мы работали в тяжелой обстановке. Происшедшая в январе реорганизация разбросала студентов той группы, которую я вел, по группам разных специальностей, и как раз в тот момент, когда они были совершенно неприспособлены к занятиям по совершенно другому плану (у нас были пройдены элементы интегрального исчисления, а в других группах — элементы диференциального исчисления), не говоря уже о той ломке установки, которая в этот период отразилась бы очень болезненно.

Стоило большого труда добиться того, чтобы для занятий по математике мои слушатели продолжали собираться вместе, и пришлось согласиться на то, чтобы студенты в течение двух месяцев работали седьмые и восьмые часы, после шестичасового рабочего дня. Как это болезненно должно было отразиться, понятно само собой. Добавьте к этому пропуски занятий отдельными студентами из-за общественной работы, часы которой совпадали с часами занятий, и вы увидите, что обстановка была очень тяжелой. Поэтому за те дефекты, которые у нас были, в значительной степени ответственны независящие от нас или, как принято говорить, «объективные» обстоятельства.

И все же, мне думается, что студенты моей группы получили не меньший запас сведений, чем остальные. Но в чем я глубоко убежден, это в том, что то, что усвоено ими — усвоено прочно, и если это верно, то результат я могу приписать не чему иному, как применению того метода изложения предмета, о котором я вам докладывал сегодня[1].

[1] Основное положение этого доклада, состоящее в том, что не следует начинать изучение анализа с теории пределов, сохраняет свою силу не только в отношении втузов. Само собой разумеется, оно относится и к тем теоретическим вузам, где математика является общеобразовательным предметом. Но, более того, я полагаю, что и в отношении математического отделения университета высказанные мною соображения не теряют своей силы. Конечно с соответствующими коррективами. Главный из них состоит в том, что теория пределов должна выступить на сцену скорее и полнее, чем это должно происходить во втузе. Но что первым концентром курса должно быть «введение в анализ», построенное по вышеуказанным принципам, — в этом я глубоко убежден.

С. Яновская

МАТЕМАТИКА В БСЭ

Математика — наука о наиболее простых, абстрактных (количественных) отношениях материальной действительности. Поэтому ее легче всех других наук переодеть в идеалистический наряд, маскирующий ее связь с практикой, отрывающий форму от содержания, извращающий в угоду классовой идеологии буржуазии подлинное положение вещей. «Крупный успех естествознания, — пишет Ленин, — приближение к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку, порождает забвение материи математиками. «Материя исчезает», остаются одни уравнения. На новой стадии развития и якобы по новому получается старая кантианская идея: разум предписывает законы природе. Герман Коген, восторгающийся... идеалистическим духом новой физики, доходит до того, что проповедует введение высшей математики в школы — для ради внедрения в гимназистов духа идеализма, вытесняемого нашей материалистической эпохой».

Казалось бы при таких условиях основной задачей наших марксистских авторов и изданий в отношении математики должна была быть беспощадная борьба с математическим идеализмом, где бы и в какой бы форме он ни проявлялся, неуклонное разоблачение его подчас очень тонких хитросплетений, неусыпная работа над установлением и в области математики подлинного единства теории и практики на основе борьбы за осуществление генеральной линии партии, на основе практики социалистического строительства. Казалось бы в таких условиях все наши работы и издания, где речь идет о математике, должны быть боевыми, воинствующе партийными. Казалось бы в первую очередь это относится к такому, рассчитанному на огромную аудиторию активно участвующих в строительстве социализма трудящихся СССР изданию, как Большая советская энциклопедия.

По замыслу Большая советская энциклопедия должна была возобновить и продолжить лучшие традиции французских энциклопедистов — этих подлинно воинствующих материалистов. «Продолжить» конечно очень слабо сказано. Ибо французские материалисты — эти идеологи нарождающейся буржуазии — в основном были все же метафизиками, механическими материалистами и идеалистами в истории; большевики же, ленинцы, вооружены таким орудием, как материалистическая диалектика. Между тем в БСЭ нет ни одной боевой, воинствующей, партийной статьи по математике. Более того, с ее страниц

иногда прямо, иногда в несколько замаскированном и «подчищенном» виде пропагандируется махизм, конвенционализм, идеализм.

Уже самый состав сотрудников БСЭ свидетельствует о том, что редакция поставила себе в отношении естествознания и техники более чем скромные цели. К работе в этих разделах почти совершенно не были привлечены молодые кадры советских ученых; она строилась исключительно в расчете на старую «левую», либеральную профессуру, марксистски совершенно неподготовленную, «беспартийную» в своей политической, а следовательно и философской установке, воспитанную на Канте, Махе и Пуанкаре и в лучшем случае пытающуюся «соединить» махизм с материализмом. Развернутое наступление социализма в СССР и связанное с ним бешеное сопротивление классового врага раскрыло кавычки этой пресловутой «беспартийности»: значительная часть основных сотрудников и редакторов БСЭ оказалась по ту сторону баррикады, в лагере контрреволюционного вредительства, в связи с международной буржуазией, социал-фашизмом и кулацко-эсеровской контрреволюцией.

Неудивительно, что редакция ничего не сделала для того чтобы взять работу отдела естествознания в целом, и математики в особенности, под контроль общественного мнения партийцев-естественников. Ни одна статья не подверглась предварительному коллективному обсуждению. Вся работа строилась на индивидуальных заказах очень ограниченному кругу лиц, ко всему прочему еще и невероятно перегруженных, т. е. смотревших на нее лишь как на весьма второстепенную добавочную нагрузку. Неудивительно, что этот отдел в БСЭ мало чем отличается от подобных отделов любой «приличной» либерально-буржуазной современной энциклопедии, что даже самая его научная «солидность» носит тот же либерально-буржуазный характер.

Неудивительно, что Энгельс и Ленин просто выпали из статей этого отдела, что отдел в целом не может быть квалифицирован иначе, как антимарксистский и идеалистический, несмотря на то, что именно тут бой с идеализмом должен был быть особенно жесток. Зато достойно замечания мирное сожительство на страницах БСЭ деборинского меньшевистствующего идеализма с откровенным махизмом, конвенционализмом, идеализмом в области естествознания и математики.

Перед нами статья главного редактора БСЭ тов. Шмидта об а л г е б р е. К нему, как к главному редактору всей энциклопедии и специалисту в этой области, должны быть предъявлены особенно высокие требования. И однако его статья ничем не отличается от любой другой статьи по математике в БСЭ, принадлежащей перу «сугубо беспартийного» либерального профессора. Ее нельзя квалифицировать иначе, как явно махистскую и богдановскую. В полном согласии с Махом, алгебра трактуется не как наука об особого типа связях и закономерностях материальной действительности, а как у д о б н ы й язык. Успехи математики объясняются не тем, что она правильно отразила (и значит поняла) характер некоторых простейших физических и механических закономерностей, а тем, что была изобретена у д о б н а я символика. «Введение символических обозначений

и операций над буквами... есть момент решающей важности — пишет тов. Шмидт. Только с этого времени математика приобрела то орудие — язык формул, — которое позволило ей вслед затем почти сразу, одним скачком, взяться за труднейшие вопросы естествознания. Блестящее развитие высшей математики, начиная с XVII в., создание анализа бесконечных малых, математическое выражение законов механики и физики и т. д. были бы немыслимы без этого орудия». Самое развитие этой «удобной символики» излагается примерно так: «Чисто словесное изложение преобладало в те эпохи, когда алгебра представляла предмет умственного соревнования в пределах тонкого слоя образованных людей (например Леонардо Пизанский при дворе императора Фридриха II). Наоборот, потребность в удобной символике, облегчающей и ускоряющей вычисления в несколько раз, возникает неизбежно, когда алгебра становится орудием повседневной практики... Приспособляясь в практике, итальянские ученые ... перешли к удобным сокращениям (речь идет о знаках + и —)... Быстро следует введение и всеобщее признание остальных знаков (степени, корня, скобок и т. д.). К середине XVII в. (Декарт) готов аппарат символов современной алгебры. К тому же времени завершилось развитие и третьей черты современной алгебры — употребление букв». Наконец возникновение аналитической геометрии объясняется тем, что в противоположность греческой науке, где преобладала геометрия, — «алгебраические средства выражения оказались уже настолько удобными и наглядными, что геометрические задачи переводились на язык алгебраических формул». Все это — типичное извращение истории науки в стиле Маха или Богданова. Именно у Маха (и Богданова) наука является лишь удобным орудием приспособления к потребностям практики, а не отражением объективной действительности. Ибо критерий практики имеет совершенно различное значение у Маха и у Маркса—Ленина. «Для материалиста «успех» человеческой практики доказывает соответствие наших представлений с объективной природой вещей, которые мы воспринимаем. Для солипсиста «успех» есть все то, что мне нужно на практике, которую можно рассматривать отдельно от теории познания» (Ленин).

Именно Мах и дал образцы такого «построения» истории науки, при котором оказались совершенно смазанными наиболее решающие, революционные ее моменты. У тов. Шмидта просто исчезла революция в математике, связанная с именем Декарта, введшим в нее переменную величину, и обусловленная ростом мануфактуры, развивавшей в отдельных случаях употребление машин, расширением в эпоху великих географических открытий торговых связей и мореплавания и стимулируемым обоими этими обстоятельствами развитием механики[1] и астрономии, или вернее она свелась лишь к созда-

[1] «Мануфактурный период, быстро уменьшающий рабочее время, необходимое для производства товаров, своим сознательным принципом, развивает в отдельных случаях употребление машин, особенно при некоторых процессах, требующих для своего выполнения большого количества людей и большой

нию удобного аппарата. Таким образом из его поля зрения фактически исчезли социально-классовые корни развития математики, зависимость одной из наиболее блестящих страниц ее истории от заложившего основы буржуазного строя «величайшего прогрессивного переворота, пережитого до того человечеством». Между тем именно до Декарта на уравнение смотрели лишь как на средство, аппарат для решения задач. Декарт первый взглянул на него, как на выражение связи, зависимости между явлениями. Любопытно, что еще во время Декарта математик Жергонь, написавший пять книг, посвященных решению уравнений, рассматривал неопределенные уравнения лишь в отделе шуточных и нелепых задач, в то время как Декарт именно их положил в основу своей аналитической геометрии. Декарт был механистом. Он рассчитывал свести все закономерности природы к этим простейшим алгебраическим соотношениям, но, повторяю, «успех математики того времени» был обусловлен как раз тем, что на алгебру перестали смотреть, как на простой аппарат для решения задач, а увидели в ее уравнениях отражение общих закономерностей природы. Недаром Энгельс в своем «Анти-Дюринге» говорил об образцах диалектики у Декарта, противопоставляя его английским метафизикам, заслонившим себе частностями взгляд на целое, не умевшим взглянуть на мир, как на материальный процесс, как на бесконечное сцепление соединений и взаимодействий. «Блестящее развитие высшей математики, начиная с XVII в., создание анализа бесконечно-малых, математическое выражение законов механики и физики и т. д.» были обусловлены не созданием «удобного языка», а именно введением в математику переменной величины и трактовкой уравнения, как выражения связи и взаимодействия. Однако не только материалистическая диалектика в ее применении к метафизике — вообще вопросы, связанные с общим философским мировоззрением, просто не нашли себе места в статье тов. Шмидта, в которой даже ни одного разу не упоминается слово материализм. Невольно приходится вспомнить другую его статью, где материализм фигурирует под покрывалом «реалистического мировоззрения», чтобы «гусей не раздразнить»: не шокировать «беспартийную» профессорскую аудиторию.

Неудивительно, что вторая революция в области алгебры, связанная с крушением механистических тенденций и созданием теории групп, являющейся, к слову сказать, основной специальностью т. Шмидта, также исчезла, как таковая, в его изложении. А между тем в современной математике теория групп играет двойственную роль. С одной стороны, она все более проникает в самые отдаленные области кристаллографии, квантовой механики и т. д., она же изучает такие глубочайшие закономерности самой математики, как общий характер ее операций, ее внутреннюю структуру, помогая

затраты силы... Очень важную роль сыграло спорадическое применение машин в XVII столетии, так как оно дало великим математикам того времени практические опорные пункты и стимулы для создания современной механики» (Маркс, «Капитал», т. I, изд. 1930 г., стр. 292).

таким образом вскрыть то внутреннее единство и связь различных математических дисциплин, которые на самих современных математиков иногда производят впечатление мистической тайны; с другой стороны, она же используется современным идеализмом для замаскирования этих связей, для формализации математики, для отрыва ее от реальной материальной деятельности, подобно тому, как он (идеализм) пытался это сделать в отношении электронной теории материи.

Как мог в таких условиях главный редактор БСЭ, специалист в области теории групп, просто обойти молчанием весь этот комплекс вопросов? Как могло у него от всей методологии в этой связи остаться лишь «целесообразное» расширение «области рациональности» путем присоединения некоторых иррациональных чисел? Удивительно ли, что в таких условиях проф. Каган, в статье об аксиоме (в том же втором томе) развивает ту же точку зрения на математику, как на «только разветвленный аппарат», да еще «покоящийся на условной аксиоматике», что он делает прямую попытку «примирения» махизма с материализмом? Что он так же, как т. Шмидт, говорит о «специально приспособленных аппаратах и методах», которые «мы сначала полусознательно, а потом вполне сознательно подбираем, строим, приспособляем и которые «медленным приспособлением совершенствуются»? «Подбираем», «строим», «приспособляем»,—но только не отражаем. Ибо в последнем случае нельзя было бы вместе со всеми махистами рассматривать математику не как науку о материальной действительности, а как конфекцион готового платья, из которого физик например выбирает по произволу, что ему угодно, руководясь лишь соображениями «удобства» и «экономии мышления».

Автор явно незнаком с материалистической диалектикой, он почти смешивает материализм с миллевским эмпиризмом; то обстоятельство, что понятия математики изменяются по мере развития последней, давая ей возможность отражения все более и более усложняющихся отношений действительности, приводит его к выводу об их условности. Если нельзя например формально-логически доказать, что умножить на дробь значит умножить на ее числителя и разделить на знаменателя, то значит на этот счет вообще можно лишь условиться. Правда, условиться целесообразно. «Почему же установлено именно такое условие, а не иное», спрашивает автор? Нельзя ли было бы разуметь под умножением на дробь иную операцию? Ответ заключается в том, что установлением именно этого определения достигается очень существенная практическая цель... Достигается единство, или общность, заключающаяся в том, что устанавливается общее правило для решения задач определенного типа. (Таким образом общность рассматривается автором лишь субъективно, как привнесенная нами, т. е. идеалистически. *С. Я.*) Это и служит руководящим, из опыта черпаемым указанием, какое соглашение для определения умножения на дробь «наиболее целесообразно установить». Нет, изменение, развитие математических понятий нельзя понять с точки зрения условности, его нельзя свести к простой формально-

логической дедукции, но оно доказуемо диалектически. Ибо для диалектического материализма логическое есть лишь сгущенное, осознанное в его необходимости историческое. Изолируясь от действительной истории, «обосновать» понятия математики в их развитии невозможно. Между тем автор начисто отрывает логическое от исторического. «Условный характер математических определений,— пишет он,— конечно не означает того, что он исторически так и возникал в виде сознательных соглашений. Но при логическом построении математики, при установлении ее аксиоматики условный характер ее аксиом остается вне сомнения».

К сожалению у нас нет здесь возможности подробнее остановиться как на отдельных конкретных ошибках этой статьи, так и на положительном выяснении нашей точки зрения на аксиомы. Этому нужно будет посвятить отдельную статью. Однако и уже приведенного, нам кажется, достаточно для выяснения антимарксистского, идеалистического характера статьи об аксиоме. Отметим лишь, что статья сопровождается указателем исключительно идеалистической литературы не только без малейшей попытки ее оценки, но даже без указания на этот ее идеалистический характер. Впрочем такие указания вообще не в стиле естественно-научного «объективизма» БСЭ.

Если статьи об алгебре и аксиоме написаны еще в 1925 г., т. е. до выхода в свет «Диалектики природы» и ленинских сборников, то казалось бы в дальнейшем, после их выхода в таких статьях, где можно еще раз вернуться к этим вопросам, нужно было использовать всякую представлявшуюся возможность исправить при их помощи допущенные ошибки, добиться по крайней мере четкой материалистической установки. Обратимся с целью выяснения, как были использованы эти материалы, к вышедшей лишь в 1930 г. статье о гипотезе, где в связи со спором о возможно гипотетическом характере математических аксиом это следовало бы конечно сделать. Хотя эта статья и выходит за пределы непосредственно математических, но так как она принадлежит перу математика и бросает свет на теоретический уровень математических статей того же автора, считаю необходимым на ней подробно остановиться, тем более что, повторяю, статья о гипотезе вышла в свет лишь в 1930 г., т. е. во всяком случае после выхода в свет «Диалектики природы». И действительно субъективно автор явно имел намерение изложить марксистско-ленинскую точки зрения по вопросу о гипотезе, он ссылается на «Диалектику природы», говорит о диалектическом материализме, критикует идеализм. И тем не менее все это поверхностно, несодержательно, мало убедительно, ибо по существу воспользоваться энгельсовскими замечаниями в «Диалектике природы» для преодоления плоского миллевского позитивизма и махизма автор не сумел. Во всей статье ни слова о самом важном в отношении гипотезы — о превращении гипотезы в закон. У автора одна гипотеза нанизывается на другую, правда, новая оказывается более охватывающей, правда, старая часто входит в нее как первое приближение, но тем не менее одна гипотеза всегда лишь сменяется другой: «Гипотеза указывает путь и руководит поисками

новых явлений, пока эти новые, являясь ее торжеством, не приводят одновременно к ее частичному пересмотру и замене новой гипотезой»[1]. Рассказывая о торжестве атомистической гипотезы, автор добавляет: «...таким образом гипотеза был а в одно и то же время утверждена (в основном) и опровергнута (в существенной части). Для объяснения внутриатомных явлений пришлось прибегнуть к новой гипотезе... эта гипотеза, объяснив ряд фактов, не справилась с другими, что заставляет искать новых гипотез о природе самого электрона и т. д.» (стр. 73). Несмотря на то, что в статье и говорится не раз, что, хотя гипотеза является неполным и частичным знанием, она все же остается отражением объективной действительности, — самый процесс все лучшего и лучшего приближения к абсолютной истине автором настолько смазан, что в конце концов все научные законы превращаются в гипотезы. В самом деле, он пишет: «Новые факты либо опровергают принятую гипотезу — тогда она видоизменяется или заменяется совершенно новой — либо согласуются с нею. В этом случае гипотеза укрепляется, одновременно обогащается подробностями и, развиваясь и вырастая в научную теорию — целую систему научных положений, некоторые из них получают столь многократное и всестороннее подтверждение на практике, что является убеждение в их полной достоверности. Но даже факты, объясненные наиболее достоверными гипотезами, при их более подробном изучении ставят перед нами новые вопросы, для разрешения которых строятся новые гипотезы. Можно смело утверждать, что большая часть содержания современных наук — в теоретической области — является либо прямо гипотезою, либо разработанными теориями, в основе которых лежит гипотеза» (стр. 72). Чувствуя «зыбкость» такой позиции, извращающей материалистическую точку зрения на гипотезу и закон, превращающей не гипотезу в закон, а закон, все содержание науки — в гипотезу, — вывод, который может быть «полезен» лишь махистам, для которых всякий закон есть лишь «удобная» и «экономная», т. е. ведущая к возможно большему числу новых открытий в полной независимости от ее правильности или неправильности, «рабочая» гипотеза, — автор оговаривается, что «однако этим ничуть не умаляется значение науки, она в целом вовсе не является зыбкой». Ибо в ней заключается все же «значительное приближение к объективной действительности». Нечего и говорить уже о том, что всем этим смазано отличие гипотезы от закона, что вопрос об относительности самого закона подменен вопросом о его гипотетическом характере, что положение вещей получается такое, при котором «конец» науки не возвращается в «начало», подтверждая и обосновывая его, снимая его гипотетический характер, а наоборот, по мере развития науки все больше и больше выясняется гипотетический характер развиваемых ею теорий.

Для сравнения позволю себе привести два места из «Диалектики природы» Энгельса. Говоря о значении гипотезы, о претерпеваемом ею изменении и развитии, Энгельс пишет: «Дальнейший опытный материал приводит к очищению этих гипотез, устраняет одни из них,

[1] Том XVII, стр. 74.

исправляет другие, пока наконец не будет установлен в чистом виде закон» [1]. «Для того, кто отрицает причинность, всякий закон природы есть гипотеза... Что за плоское мышление у тех, кто желает ограничиться этим!» (стр. 7). В значительной мере ускользает от автора и роль деятельности человека, в деле не только пассивного предвидения будущего, но и активного изменения человеком природы, в деле проверки высказанной гипотезы, хотя он и говорит несколько раз не только об объяснении, но и об овладении природой. Иначе он не приводил бы плоских миллевских правил для проверки гипотезы (имеющих целью установить, что наличие *А* есть необходимое и достаточное условие для наступления *Б*), не упомянув при этом, что иногда не получается ожидаемого эффекта, и тем не менее именно это доказывает гипотезу, а не опровергает ее, если при подобном отклонении от правила можно, произведя соответствующее исследование, найти причину его, благодаря чему получается двойная проверка гипотезы (см. «Диалектику природы», стр. 16, заметка о причинности). Иначе он не мог бы не заметить, что именно деятельность человека, то обстоятельство, что он «в состоянии вызвать движения, которые по крайней мере именно в таком виде вовсе не встречаются в природе (промышленность)», и дает как раз такую проверку гипотезы, которая превращает ее в закон. Правда, он и сам оговаривается, что «это (миллевское. *С. Я.*) правило хорошо в той степени, в какой применима формальная логика, т. е. в более простых случаях», в то время как «в более сложных явлениях разобраться... сможет только диалектическая логика», но ведь это же только фраза, если автор не дал себе труда хотя бы сформулировать более конкретно задачу, которую должна будет и сможет разрешить «только диалектическая логика». Повидимому такое стремление «отделаться» от диалектического материализма при помощи фразы и вообще характерно для автора. Чего стоит хотя бы одно такое утверждение: «Плодотворны те гипотезы, которые связаны с широким научным миросозерцанием. Для нашего времени это—диалектический материализм»! Все. Ни слова о том, почему плодотворны именно те гипотезы, которые связаны с «широким научным миросозерцанием», а главное, ни слова о том, почему «для нашего времени это—диалектический материализм», и только ли «для нашего времени». Да наконец как может диалектический материалист просто поставить диалектический материализм в ряд с другими «широкими миросозерцаниями», пригласить ученых пользоваться им «для нашего времени» и не объяснять почему, не подчеркнуть необходимости, неизбежности перехода естествознания на рельсы методологии диалектического материализма! Неужели нельзя было воспользоваться хотя бы замечанием Энгельса о том, что «именно диалектика является для современного естествоиспытателя самой правильной формой мышления, ибо она одна представляет аналог и значит метод объяснения для происходящих в природе процессов развития, для всеобщих связей природы, для перехода от одной области исследования к другой»; что «нельзя теперь взять в руки почти ни одной теоретической книги по естествознанию, чтобы не

[1] Стр. 5, 3-е изд.

убедиться в том, что сами естествоиспытатели понимают, как они страдают от этой путаницы и бессвязности, из которой им не дает абсолютно никакого выхода модная, с позволения сказать, философия. И здесь нет действительно иного выхода, нет никакой возможности добиться ясности без возврата в той или иной форме от метафизического мышления к диалектическому» («Диалектика природы», стр. 89). А между тем постольку, поскольку именно в теоретическом естествознании гипотеза играет необходимую роль, основная задача, которую должен был себе поставить автор статьи, и должна была состоять в том, чтобы на конкретных примерах показать эту необходимость, эту неизбежность внедрения в естествознание методологии диалектического материализма, о которой говорит Энгельс. Но автор предпочел ограничиться двумя, в лучшем случае, совершенно бессодержательными фразами о диалектической логике и диалектическом материализме.

В заключение еще одно замечание. Рассказывая о разнообразии часто друг другу противоречащих гипотез, каждая из которых однако «дала и дает науке могучие толчки для исследований в различных направлениях», автор опять-таки не дает себе труда объяснить, почему это возможно, хотя именно так между прочим поступает и Мах, который, констатировав факт, что гипотезы «полезны», «экономны» и «удобны» естествоиспытателю вне зависимости от того — истинны они или ложны, делает отсюда и дальнейший вывод, что вопрос об истине вообще не важен для науки [1].

Автор конечно «не хочет» такого откровенно махистского вывода. Однако он не может подняться до энгельсовского объяснения того, почему и неправильные гипотезы могут быть полезны для науки. Дело в том, что эти гипотезы не просто неправильны; они, подобно гегелевской диалектике, лишь переворачивают реальные отношения материальной действительности, скрывая таким образом рациональное зерно под неправильной, мистической оболочкой. Таковы например были гипотезы о теплороде и флогистоне. Их необходимо поэтому подвергнуть вторичному переворачиванию, поставить с головы на ноги. Механическая теория теплоты произвела это необходимое перевертывание в учении о теплоте. Современная химия не просто отвергла результаты флогистики. «Наоборот, они сохранились, была перевернута только их формулировка, переведена с языка флогистона на современный химический язык». И Энгельс пользуется этим обстоятельством для того, чтобы отметить, что «гегелевская диалектика так

[1] По Маху «существенная функция гипотезы» состоит не в том, что она помогает объяснению явлений, приведению их в связь, что она ведет к обнаружению закона, а в том, что «она ведет к новым наблюдениям и новым опытам, в результате чего наша догадка подтверждается, опровергается или видоизменяется,—одним словом наш опыт расширяется». И он сочувственно цитирует Пристли, заявляющего, что «нет вовсе необходимости иметь a priori верные взгляды и правильные гипотезы, чтобы делать настоящие открытия». Вопрос о том, почему неправильные гипотезы могут вести к настоящим открытиям, его при этом ничуть не интересует. Это дело случая и зависит уже от счастья. «Как широко или как мало значение гипотезы выходит за пределы того факта, который послужил причиной ее возникновения, содействует ли она многим или немногим открытиям, это зависит уже от счастья» (Мах, «Познание и заблуждение»).

относится к рациональной диалектике, как теория теплорода к механической теории теплоты, как теория флогистона к теории Лавуазье». Замечание чрезвычайно существенное и для философов и для естественников и действительно дающее возможность преодолеть махизм в вопросе о гипотезе.

О математике, об особой форме гипотезы в этой науке, о попытках использовать ее для отрыва математики от реальной материальной действительности и превращения ее в совокупность «гипотетических» предложений типа: «если верно то-то, то верно и то-то» в полной независимости от того, верно ли это в действительности (Рессель, вообще логисты),—в статье ни слова. А между тем это идет по той же линии утверждения равноправности всевозможных (любых) гипотез.

Наряду со статьями, в которых методологические вопросы так или иначе поставлены, в БСЭ имеется ряд статей по математике, носящих чисто деляческий характер, без намека на марксизм, на классовую борьбу, борьбу идеологий, без малейшей попытки дать не только внешнее описание, но и объяснение,— статей, скрывающих свою идеалистическую установку именно под этой маской деляческа. Такова например статья об а р и ф м е т и к е. Вот как излагается история арифметики у греков. «Греки, многому научившиеся у египтян, были несравненно лучшими теоретиками и поставили арифметику на высоту науки. Они резко разграничивали арифметику теоретическую, которую они собственно и называли арифметикой, понимая ее как науку, изучающую самое понятие о числе и его свойствах, от практической арифметики,— искусства производить вычисления,— которую они называли логистикой». Во-первых, это относится вовсе не ко всем «грекам», а лишь к грекам школы Евклида, т. е. лишь к определенному периоду греческой истории и определенному классу греческого общества, выразителем презрительного отношения которого к практике, «этому занятию рабов», явился Платон. По автору же получается впечатление, что наукой арифметика стала п о т о м у, что она отделилась от практики. И это проповедуется со страниц Советской энциклопедии. Но особенно замечательно окончание статьи. Тут, уже после того как была изложена фактическая и с т о р и я развития понятия о числе, тоже развитие трактуется л о г и ч е с к и так: «исходя из непосредственного понятия о целом числе, уже элементарная арифметика наталкивается на невозможность производства простейших арифметических действий в области целых чисел; приходится вводить числа дробные, затем иррациональные, затем отрицательные, и таким образом постепенно расширять самое понятие о числе».

Это бы еще ничего, хотя и тут уже сквозит отрыв исторического от логического, попытка трактовать логическое изолировано от исторического, но дальше идет прямая рекомендация самого махрового идеализма в математике. «Указанные вопросы (т. е. вопросы обоснования арифметики),—пишет автор,—были успешно разрешены в трудах Грассмана, Вейерштрасса, Дедекинда, Кантора и др. И хотя в дальнейшем он сам признает, что вопрос обоснования арифметики не может считаться окончательно решенным, но надежды на его разрешение возлагает на того же «логиста» и «формалиста» Гиль-

берта. Того самого Гильберта, который, не стесняясь, превратил математику в игру, с основными понятиями которой категорически запрещается связывать какое-нибудь реальное, конкретное содержание. Идеализм под маской делячества — такова методологическая установка этой и в научном отношении весьма посредственной статьи.

История без классовой борьбы, без исторического материализма, махизм, конвенционализм и откровенный идеализм в методологических установках, пренебрежение к Марксу, Энгельсу и Ленину — таков вывод уже из самого беглого первого просмотра статей по математике в Большой советской энциклопедии. И все это печаталось в издании, общее методологическое руководство которым фактически находилось в руках бывшего естественно-научного и философского руководства. Не только печаталось, но и принималось на местах (и притом нередко весьма квалифицированными товарищами — руководителями семинаров по материалистической диалектике в естествознании) за ортодоксальный марксизм. Мне самой в этом пришлось убедиться в отношении такой «провинции», как Ленинград. Убедиться с тем большим сожалением, что упрек в недооценке роли такого издания, как БСЭ, приходится отнести и к себе самой.

Просмотр БСЭ фактически теперь лишь начинается. Его необходимо проделать чрезвычайно старательно, в порядке большой коллективной работы, во-первых, как урок на будущее, и, во-вторых, как средство исправления уже сделанного. Основные результаты его должны быть в той или иной форме использованы энциклопедией — либо для второго издания, либо путем возврата к уже обсужденным вопросам в близких по смыслу словах, либо путем специальных приложений. Мы должны помнить указание т. Сталина, что правильная положительная точка зрения слагается лишь на критике, лишь в борьбе.

Э. Кольман.

Я. Л. Харапинский. «Материалистичекая диалектика в математике», ч. 1, изд. Вятского педагогического института им. Ленина, Вятка, 1928, стр. 120, тираж 500 экз., ц. 90 коп.

Книга с таким многообещающим названием вызвала в нас сначала чувство радости, потом некоторую настороженность и наконец после прочтения — порядочное разочарование.

Нельзя искренне не радоваться тому, что у нас начинают понемногу выходить работы, стремящиеся отвоевать для марксизма математические науки, которые считались до сих пор идеалистической твердыней. Нельзя также не радоваться тому, что вопреки ходячему представлению нашей столичной спеси «глухая провинция» живет активнейшей научной жизнью: один лишь Вятский педагогический институт издал за 3 года 41 работу из разных областей естественных и общественных наук. Но именно то обстоятельство, что работы, как рецензируемые нами, появляются на новом этапе классовой борьбы, когда интервенция и заговоры сменились контратаками кулака и нэпмана на наступающий пролетарский фронт и нападениями «аполитичной» профессуры на марксистскую теорию, — именно это обязывает нас

к настороженности. Ведь само собой понятно, что при данных условиях «попытка доказать, что диалектический материализм не только не опровергается математикой, а наоборот, подверждается ею» (что является, по словам предисловия, основной задачей данной работы), встретит бешеное сопротивление идеалистов и что поэтому, если паче чаяния автор с задачей не справится, если его книга не окажется диалектически материалистической, недостатки ее будут использованы противниками не только против данной книги, но и против марксистской методологии вообще. Отсюда следует для диалектиков-материалистов обязанность внимательнейшей критики, которая должна вскрыть существенные ошибки книги, если таковые в ней имеются.

В коротком введении автор более или менее [1] правильно намечает размежевание между формальной логикой, «объектом которой является само мышление», и математикой, имеющей своим объектом «реальные отношения существующего в мире», и ставит вопрос об изучении тех реальных связей, которые лежат в основе математических законов и обусловливают собой возможность приложимости математики к практике.

Первая глава «Что такое математика?» дает прежде всего критику разных определений математики, как они даются Риманом, Гельмгольцом, Грассманом, Ресселем, Кутюра, Пуанкаре. Автор вскрывает беспомощность попыток Римана обосновать понятие многообразия независимо от реального мира и поставить его в качестве продукта мышления в основу математики. Он выявляет уходящий в солипсизм взгляд Грассмана на математику как на науку о частном бытии, науку о формах мышления. Далее он показывает тупик, в который упираются логисты, смешивающие логику с математикой, пытающиеся свести их одну к другой и превращающие математический аппарат — ее символику — в фетиш. Эта критика бьет по цели, и ее силу не умаляет даже ряд ляпсусов, как то: давая характеристику взгляда идеалистов на математическое мышление, автор употребляет заимствованный у идеалистов термин «не имеющее аналога (!) в объективном мире»; за невозможность сведения математики к логике автор «аргументирует» так: «человек, который не знает математики, все же мыслит логично, хотя бы инстинктивно»; автор утверждает, что количество измерений непрерывного многообразия определяется количеством возможных, идущих в одном только направлении (вперед и назад) переходов между его отдельными образами — утверждение, опрокидываемое хотя бы существованием самопересекающихся кривых, т. е. однопротяженных многообразий, в которых однако возможны многократные переходы от точки к точке.

---

[1] «Более или менее» потому, что наиболее общие законы мышления окончательно те же, что и законы бытия, ибо мышление отражает бытие. Даже ставящая себе задачей изучить ф о р м ы мышления независимо от какого бы то ни было их с о д е р ж а н и я формальная логика на самом деле не лишена некоторого, хотя бы в крайней степени абстрактного, но «абстрагированного все же от реальной материальной действительности содержания, какой-то м о м е н т действительности правильно отображающего. Начисто оторвать форму от содержания не удается даже той науке, основной целью которой именно этот отрыв и является.

Однако хуже обстоит дело там, где автор приводит свое собственное определение математики, долженствующее быть определением диалектически-материалистическим. Он определяет математику как «науку о временных и пространственных соотношениях между объектами внешнего мира». Но к этому определению следует предъявить ту же претензию, которую автор законно предъявляет к определению Римана, спрашивая, «почему с таким же правом (как о математике) нельзя сказать и о физике, что она наука о многообразиях?» Итак, разве временные и пространственные соотношения не являются объектом изучения физики? Конечно да. Но то, что составляет то особенное, что делает как многообразия вообще, так и пространство и время в частности объектом математики — это их количественная сторона. Количество как внешнее бытие — вот что составляет предмет математики. И автору, который совершенно правильно отверг как слишком узкие определения математики Контом как «науки об измерении величин» и Декартом как «науки о числе», не удалось дать научного определения математики потому, что он, хотя и верно отметил, что «математику не интересует качественная сторона объектов», свел ее интерес к механическому «размещению, распределению их (объектов) в пространстве и времени». Заявляя, что математика «отвлекается от изменений, которым подвергнуто все сущее, и рассматривает его многообразия в их пространственных и временных соотношениях», автор скатился к упрощенному пониманию движения, отождествляя движение с его простейшей формой, с перемещением.

Этот механический подход на протяжении всей книги к важнейшей категории диалектического материализма — к движению — губит автора, ставшего жертвой механического материализма. Конечно автор прав, когда он во второй главе «Время и пространство» критикует кантовское понимание пространства как вместилища предметов, понимание пространства как априорного условия внешних явлений и понимание времени как априорного условия явления внешних и внутренних. Нельзя не согласиться с критикой автором кантовского понимания времени, как вспомогательного понятия, — времени, будто не существующего в природе даже в качестве формы созерцания. Однако опять-таки дело из рук вон плохо там, где автор начинает излагать якобы диалектически-материалистическое понимание пространства и времени.

Прежде всего попытки автора дать определение тому, что такое пространство и что такое время, вращаются в таких убийственно жалких тавтологиях, как определение пространства как той формы бытия, когда налицо «отношения между существующими в е щ а м и, которые продолжают существовать друг п о д л е друга: никакой надобности нет в исчезновении одной из них, чтобы иметь возможность рассматривать другую как сущее», между тем как время определяется им как та форма бытия, когда налицо «п р о ц е с с ы, следующие друг п о с л е друга, где каждое последующее явление занимает место, предшествовавшее ему» (разрядка моя — *Э.К.*). Итак, определение пространства и времени обосновано здесь различием понятий «вещь» и «процесс», «подле» и «после». От таких «определений» чуть ли не

посочувствуешь логистам, которые вводят сложнейшие обозначения, для того чтобы сделать невозможным незаметное протаскивание в предпосылку того, что требуется вывести в дальнейшем. Беда, случившаяся с автором, неминуема, потому что он желает определения основных, наиболее общих понятий предпослать науке, между тем как эти определения получаются лишь в результате самого развития всей науки и не даются нам как простые, а содержат в себе все богатство ее содержания.

Несостоятельным является утверждение автора, будто «пространство измеряется не только пространством, но и временем», между тем как «время исключительно измеряется временем»,—ведь всякая единица измерения времени так же материальна, как и единица измерения пространства, а значит представляет собой единство пространства времени, в чем автор легко сможет убедиться, внимательно рассмотрев любые часы. Соглашаясь с теорией относительности, что «поле тяготения определяет законы метрики пространства-времени», автор заявляет, что он «не может согласиться с тем, что теория относительности приписывает пространству неоднородность», ничем не подкрепляя это свое несогласие. Не различаются автором понятия бесконечности и неограниченности, между тем как на деле для рассматриваемого многообразия пространства-времени они вовсе не a priori тождественны.

Правильно исходя из единства пространства и времени, автор впадает в эклектизм, как только пытается указать то, что отличает эти две формы бытия друг от друга: из четырех отличительных признаков, которые насчитал автор, лишь один—одномерность времени в отличие от трехмерности пространства—верен и не заимствован им у Пуанкаре. Прежде всего утверждение автора, что в противоположность пространству, которое не только непрерывно, но и прерывно, время только непрерывно, не вяжется с признаваемым самим автором единством пространства и времени. Свое утверждение автор подкрепляет цитатой из Гегеля: «Науке о пространстве—геометрии—не противостоит такая же наука о времени. Различия времени не обладают тем равнодушием бытия вне себя, которое (равнодушие) составляет непосредственную определенность пространства; они не способны поэтому создать фигуру как пространство». Как будто ясно, что из приведенной цитаты никак нельзя вывести, будто время только непрерывно; она относится к его одномерности: будь пространство также лишь одномерным, как время, то и в нем не существовало бы элементов с очертаниями, в его «геометрии» не было бы фигур, а лишь одни точки и отрезки.

Другой отличительный признак автор формулирует так: «При изменении объекта, т. е. пространства, изменяется, т. е. движется, и время, при изменении же времени внешне не всегда изменяется пространство». Как видно, провозглашенное автором единство пространства и времени становится прямо-таки загадочным. А маленькое словечко «внешне», как пальцем, тычет на субъективное значение, которое автор здесь приписал пространству. Вся нелепость этой концепции особенно наглядно видна на примере, которым ее иллюстрирует сам автор: «Когда сверну тетрадь в трубку, в результате будем иметь не только

изменение пространства, но также изменение во времени, так как на произведенную мною операцию прошло некоторое время. Наоборот, если бы время изменилось, т. е. прошло бы 5—10 минут, то оно не обязательно сопровождается изменением лежащей передо мной тетради, которая может внешне остаться без изменения и может «измениться». Что за чертовщина? Каким это манером изменяется время, проходит 5—10 минут, причем застывает все движение, остановились все процессы, одним словом—«5 минут покоя в честь павшего солдата», когда все движение останавливается в космическом масштабе? А может быть, что не все остановилось, а лишь тетрадь автора — застывшая вещь из платоновского царства идей? Но если даже так, то каким это образом она, пребывая неизменной и неподвижной, все-таки останется под наблюдением автора, который, несмотря на то, что успеет удалиться от нее вместе с земным шаром на 8 900 *км* (не считая вращения земли и движения всей солнечной системы), все же сможет констатировать по истечении 5-минутного срока ее сбсолютную неизменность? Или наконец «внешнее» следует понимать так, что это лишь по отношению к восприятию автора? Но ведь автор в этом усматривает «весьма существенное различие между временем и пространством»,— какое же это о б ъ е к т и в н о е время, когда оно имеет с у б ъ е к т и в н о е своим существеннейшим признаком?

Но автор называет нам еще один признак, якобы отличающий время и пространство: «движение в пространстве может быть всегда возвращено к своему исходному пункту, движение же во времени не может пойти в обратном направлении». В подтверждение автор опять-таки приводит пример: линия AB представляет расстояние между двумя городами (Москва—Ленинград), линия $A_1\ B_1$—промежуток времени между 1 января и 1 февраля 1928 г.

$$\begin{matrix} A & & B \\ A_1 & & B_1 \end{matrix}$$

«Если я совершил движение от A до B, то я всегда могу начать это движение в обратном направлении, т. е. от B до A,—заверяет нас автор, не так обстоит дело со временем: если преодолеть отрезок его от A_1 до B_1, то я не могу проделать то же самое в обратном направлении». Итак, «пространство обратимо, время необратимо, если все направления пространства эквиваленты, направления же времени не эквивалентны». Все это верно однако т о л ь к о в а б с т р а к ц и и, для ограниченных промежутков времени и пространства, для «домашнего употребления» обывателя в мышлении, начисто отрывающего пространство от времени, не видящего их единства. Свыше двух тысячелетий известно, что «два раза нельзя погрузиться в одну и ту же реку», а в приведенном конкретном примере стоит автору взять лишь достаточно большой промежуток времени, чтобы убедиться в том, что город, в который возвращаешься, не тот, из которого ты выехал, в особенности в нашу эпоху социалистической реконструкции. С другой стороны, понятие о необратимости времени тесно связано с реакционным ограниченно-узким толкованием второго начала термодинамики: с космической точки зрения обратимо процессы могут течь как в сторону возвра

щающей, так и в сторону уменьшающейся энтропии. Таким образом выходит, что понятия обратимости и необратимости приложимы к пространственно-временному многообразию лишь в их единстве. Между тем автор, несмотря на свою декларацию о единстве пространства и времени, в вопросе о необратимости и обратимости — так же впрочем, как и в вопросе о непрерывности и прерывности — и в вопросе о взаимозависимости разорвал метафизически пространство и время друг от друга. Цитируя к месту такие глубокомысленные стихи академика Ферсмана и «талантливого французского мыслителя (читай идеалиста)

О, Бездна прошлого! зловещая, глухая,
Как пропасть, временем раскрытая в сердцах,
Ты кружишь голову, ты губишь нас, пугая...

Гюйо, как автор правильно отмечает, что «необратимость времени вызвала у многих даже мистический страх», но он, к сожалению, принадлежит сам к тем, у кого кружится голова над созданной им же самим пропастью между временем и пространством.

Третья и последняя глава книги «Число» не отличается от предыдущих двух. С автором происходит нечто подобное тому, что до сих пор мы часто видим на нашей сцене: отрицательные роли растратчиков и нэпманов актеры выполняют удачно, но на положительных ролях рабочих и крестьян то и дело срываются. Критика конвенционалистического определения числа субъективным идеалистом Грассманом как «соединения того, что положено нами как разное», критика взглядов Рёсселя и Кутюра, требующих предпослать определению числа определение порядка, критика Зигварта, провозглашающего число свободным созданием нашего мышления, критика логистов Пеано, Падуа, Бурали-Форти, Уайтхеда выходит у автора в общем удачно. Относящиеся к вопросам истории культуры и психологии положения автора, его замечания о возникновении речи на основании коллективного копания и плетения первобытных людей или о «возникновении понятия равенства в результате того, что общество в первоначальной стадии своего развития не было диференцировано: все члены его были равны перед природой своим бессилием» — от всего этого прямо так и разит богдановщиной. Чрезвычайно упрощенное изложение дано автором возникновению комплексных и гиперкомплексных чисел; вопрос о противоречии в иррациональности им совершенно не вскрыт.

Наивысшей точки достигает однако методологическая путаница автора, когда он заявляет: «Качественное сравнение носит материальный характер и всегда конкретно, количественное сравнение — формальный характер и абстрактно, хотя может быть и конкретным. По этой причине (?!) все многообразие мира может быть выражено количественно, ибо в нем существуют различия, поскольку они — многообразие, существует единый общий признак, признак бытия». Здесь в первом положении автор опять-таки употребляет испытанный им на протяжении всей книги прием рассечения существующих в единстве категорий, в данном случае категорий качества и количества. Тем самым автор делает взаимный переход этих категорий если не невозможным,

то исключительно редкостным явлением. Второе же положение нельзя вывести из первого ни посредством формальной, ни посредством диалектической логики, так как оно принадлежит к силлогизмам рода «Лошади кушают сено. По этой причине Волга впадает в Каспийское море». А в доказательстве это положение очень нуждается, ибо одного общего признака бытия вкупе с существующими в нем различиями все-такие, мягко выражаясь, маловато, для того чтобы все многообразие мира можно было выразить количественно. От такой «поддержки»,— надо полагать, откажутся и современные механисты и сам Лаплас, уже слишком это доказательство напоминает небезызвестное доказательство бытия божия богослова Ансельма: раз идея бога людям присуща, то он должен существовать.

Во второй, имеющей еще появиться, части работы, автор обещает осветить вопросы анализа бесконечно-малых и вопросы математического метода. Как бы мы ни приветствовали почин автора в издании книги, которая во всяком случае возбуждает значительный интерес и дает прежде всего достаточно много такого, от чего нужно оттолкнуться, мы должны напомнить, что писать о материалистической диалектике в математике можно пожалуй и без тех греческих цитат, которыми автор украсил свою книгу, но уже никак не без серьезнейшего изучения и материалистической переработки гегелевского учения о количестве, без всемерного использования немногих, но блестящих страниц Маркса, Энгельса и Ленина по связанным с данным вопросом проблемам.

В порядке самокритики автору следовало бы во второй части исправить эту основную ошибку части первой.

М. Выгодский

Комаров В. Н. Теоретические основы арифметики и алгебры, Гиз, 1929, стр. 448, ц. 6 руб.

Эта книга предназначена, по словам автора, для преподавателей средней школы. Поэтому можно было бы ожидать, что изложение теоретических основ науки будет связано с методическими вопросами, что преподаватель школы найдет в этой книге, если не методические указания, то по крайней мере методологическую установку, исходя из которой он сможет внести свежую струю в преподавание математики.

Читателя, подходящего к книге с этой надеждой, ждет разочарование. Он найдет здесь лишь формально-логическое обоснование арифметики и алгебры. Уже одного этого факта достаточно, чтобы признать книгу несоответствующей своему назначению. Однако помимо вопроса о том, насколько книга полезна преподавателю, возникает и вопрос, насколько ценна книга «в себе», на какой методологической базе она построена.

Начнем с обзора ее содержания. Книга распадается на две части: одна посвящена арифметике, другая — алгебре. Первая часть содержит главы: 1—Натуральные числа; 2—Общие свойства чисел; 3—Ра-

циональные числа; 4—Вещественные числа; 5—Пределы; 6—Комплексные числа. Таким образом предметом 1-й части служит учение о числе. Какова же исходная точка зрения автора? Она формулирована им уже в предисловии: «В основу всей арифметики... положены четыре аксиомы, к которым я подхожу, анализируя сущность операции счета, и на которые я смотрю как на сжатое описание натурального ряда чисел просто как произвольно установленного (именно для счета) ряда символов, который может быть продолжен как угодно далеко. Точка зрения на числа как на символы — это основная точка зрения, принятая мною по отношению ко всей арифметике».

В этой формулировке, центральная мысль которой, взятая самим автором в разрядку, является совершенно неприемлемой для материалиста, есть как будто некоторая половинчатость. Может создаться впечатление, что произвол в выборе символов и их свойств есть произвол относительный, что он покоится на «анализе операции счета». Однако по существу никакого анализа процесса счета автор не дает, если не считать небольшого экскурса (стр. 20—22) в область теории множеств, где процесс счета представлен как установление взаимно однозначного соответствия между элементами двух множеств, одно из которых обладает свойством упорядоченности в) анализ этого понятия автор не входит); элементы этого второго множества автор называет натуральными числами, — и это весь анализ процесса счета. Больше того, автор на стр. 24 солидаризуется с Дедекиндом, приводя его слова: «Числа есть свободные создания человеческого духа и служат средством, позволяющим нам легче и яснее постигать различие вещей».

Впрочем следует отметить, что развивая (как увидим дальше) свое изложение в духе чистого символизма и находясь таким образом всецело в плену у господствующего направления математической мысли, автор не дает себе отчета в том, что приводимые им на стр. 23 взгляды на сущность числа Гейне, Шредера, Гельмгольца, Дедекинда и Кронекера различны между собой, и объединяет их без всяких оговорок. Этот философский эклектизм сказывается в рассуждениях автора и в самом изложении.

Итак, анализ процесса счета фактически не дается, и четыре аксиомы арифметики «сваливаются с неба» на голову читателя.

Точка зрения автора на аксиомы как на систему определений основных понятий есть точка зрения современного аксиоматического метода и трактуется как единственно возможная в науке (стр. 25). «В прежнее время на аксиомы смотрели как на истины, не требующие доказательств в силу своей очевидности, а что касается основных понятий, то об их необходимости в математических науках просто не подозревали; если же какое-нибудь понятие и вводилось без определения, то попросту как хорошо известное каждому. Такая точка зрения на аксиомы и основные понятия как вещи, сами собой понятные, о которых не стоит поэтому особенно толковать, сплошь и рядом встречается даже и теперь, после того периода ожесточенной самокритики, которую пережила и собственно продолжает переживать математика.

Эта точка зрения глубоко ошибочна: то, что отличает аксиомы от теорем, т. е. от предложений, которые доказываются, и основные понятия от прочих понятий данной дисциплины, — это вовсе не бóльшая или меньшая очевидность или понятность. Математические теоремы доказываются *не для того* или во всяком случае не только для того, чтобы читатель или ученик наконец-таки убедился в их справедливости, а *главным образом* затем, чтобы читателю или ученику была ясна логическая связь, существующая между этими теоремами и другими предложениями, установленными или принятыми раньше. Это — главная цель доказательства».

В освещении автора аксиоматическое мировоззрение (если так можно выразиться) противопоставляется как единственное научное взглядам «прежнего времени» как историческим заблуждениям. С этим нельзя согласиться. Прежде всего не *верно*, что «в прежнее время» существовал всегда тот взгляд на аксиомы и определения, который автор считает глубоко ошибочным. Напротив, еще в классической греческой математике наблюдается тенденция к проведению аксиоматического метода. Что пятая книга «Начал» Евклида построена чисто аксиоматически — это бесспорный факт. Напротив, в более позднее время (XVI—XVII вв.) аксиоматический метод Евклида был подвергнут методологической критике и был сознательно отвергаем (см. например Д. Д. *Мордухай-Болтовской*, Исследование о происхождении некоторых основных идей современной математики, «Известия Северо-кавказского государственного университета», 1928, т. III).

Современная аксиоматическая точка зрения поэтому должна рассматриваться не как ликвидация наивных заблуждений, а как исторически обусловленный *этап* развития теоретической мысли, этап, который несомненно обогащает науку, но не составляет ее последнего слова. В частности в вопросе о том, зачем доказываются математические теоремы, нельзя остановиться на той точке зрения, что главной целью является установление формальной связи между свободными произведениями человеческой мысли. Верно, что нахождение логических связей между предложениями независимо от «справедливости» их составляет важное орудие исследования. Но конечной целью этого исследования, объективно оправдывающей его, является именно установление «справедливости» предложения, точнее говоря, *соответствия предложения с действительностью*. Вне этой конечной цели нет науки, ибо игра символами — это не наука. Поэтому приведенные выше программные заявления автора, претворению которых посвящена вся книга, мы должны считать, выражаясь его словами, глубоко ошибочными, и пропаганду этих взглядов через посредство преподавателя в среде учащихся — вредной.

Обратимся теперь к рассмотрению примеров того, как намеченная программа претворяется в жизнь. Остановимся на § 2 первой главы, непосредственно следующим за введением, только что разобранным.

«В основу всей арифметики, по крайней мере той, которая фактически развивается в этой книге, могут быть положены *два* основ-

ных математических понятия и четыре аксиомы. Убедиться в том, что это действительно так, можно только единственным способом— внимательно прочитав всю книгу и проверив все рассуждения».

Нам кажется, что достаточно внимательно прочитать § 2 первой главы (стр. 26—34), чтобы убедиться в том, что двух основных понятий и четырех аксиом во всяком случае недостаточно, чтобы положить их в основу той арифметики, которая развивается в книге, и тем более в основу арифметики вообще.

За основные понятия принимаются автором понятия «натуральное число» и «предшествует»: «Когда читатель встретит такую фразу: «натуральное число a предшествует другому натуральному числу b» то он может подразумевать под этим все, что ему угодно (в частности то, что он привык подразумевать до сих пор), лишь бы то конкретное содержание, которое будет вкладываться в эту отвлеченную фразу, не оказалось в противоречии с аксиомами».

Заметим здесь же, что автор говорит о «конкретном содержании», которое можно вложить в отвлеченную фразу; следовательно имеется в виду возможность «практического использования» абстрактной логической схемы. Такую точку зрения можно приветствовать, хотя следует указать, что эта мысль звучит диссонансом с общей установкой автора. Как бы то ни было, но к конкретному содержанию логических схем, им развиваемых, автор больше не обращается. Конкретное остается за кулисами, а на сцену вслед за двумя основными понятиями выступают четыре аксиомы.

(A) Если a и b различные натуральные числа и если a не предшествует b, то b предшествует a.

(B) Каждое натуральное число непосредственно предшествует некоторому другому натуральному числу.

(C) Каждое множество, состоящее из натуральных чисел, содержит такое натуральное число, которому не предшествует никакое другое число этого множества.

(D) Если натуральному числу a предшествует какое-нибудь натуральное число, то существует и такое натуральное число, которое предшествует числу a непосредственно [1].

Из этих-то четырех аксиом автор и дедуцирует всю арифметику, в частности доказывает принцип полной математической индукции.

Читатель видит, что логические аксиомы, т. е. правила дедукции, не учитываются в этой системе аксиом. Очевидно автор исходит из того, что эти логические аксиомы уже подразумеваются. Но, если стать на аксиоматическую точку зрения, то логические аксиомы не могут основываться на очевидности их и значит должны быть приняты, так сказать, по соглашению, по соглашению читателя с автором. Какую именно систему логических понятий автор берет за основную и какие правила дедукции за аксиомы, читателю остается неиз-

[1] Понятие «непосредственно предшествует» определяется автором так: a непосредственно предшествует b, если: 1) a предшествует b, 2) не существует числа c, которому a предшествует и которое само предшествует b.

вестным. Но может быть это и не нуждается в специальном оговаривании в силу общепринятости? Увы, и это оправдание не может защитить автора: известно, что вокруг законов логики, в частности вокруг закона исключенного третьего, идет ожесточенная борьба в современной математической литературе. Но есть и другая сторона вопроса, не менее важная. Ведь автор предпринимает попытку логического о б о с н о в а н и я арифметики. Допустим на минуту, что есть бесспорная и общепринятая система логических аксиом. Но можно ли ручаться, что формулировка этой системы возможна без апелляции к понятию числа и к тем или иным его свойствам? Так как в литературе (Пуанкаре) имеются определенные утверждения невозможности этого, то автору, если он этого мнения не разделяет, следовало бы в первую очередь доказать н е з а в и с и м о с т ь аксиом логики от аксиом арифметики, ибо в противном случае какая цена л о г и ч е с к о м у обоснованию арифметики? Автор игнорирует эту задачу, и это тем более странно, что о статьях Пуанкаре он упоминает на стр. 30 («... только в новейшее время принцип математической индукции стал известен благодаря работам Пеано и его учеников, а также знаменитым статьям Пуанкаре»). Сбрасывая с плеч эту труднейшую из проблем обоснования арифметики — проблему связи между арифметикой и логикой, — автор конечно развязывает себе руки, но читатель вправе иметь претензию к автору, обещавшему на стр. 8 книги, что он будет «излагать все доказательства полностью, ничего не «п о д р а з у м е в а я».

Попробуем однако стать на точку зрения автора и допустим, что в основу приняты два основных понятия и четыре аксиомы арифметики плюс какая-то система логических понятий и аксиом. Верно ли, что все содержание книги разворачивается из этой базы? Нет, не верно.

Ведь, уже в а к с и о м е (С) содержится слово «множество». Понятие множества вовсе не есть основное логическое понятие, — по крайней мере ни из чего не вытекает, что его нужно отнести к основным логическим понятиям с бо́льшим правом, чем понятие натурального числа. Значит с д в у м я основными понятиями никак не управиться. Далее, что значит: «множество с о с т о и т из натуральных чисел»? Поскольку понятие «состоять» не включено автором в число основных, мы имеем право требовать, чтобы оно было определено. На стр. 29 при «доказательстве» принципа индукции автор употребляет уже выражение «числа принадлежат множеству». Что такое «принадлежать» и какова связь понятия «принадлежать» с понятием «состоять» — это тоже секрет автора.

Употребляя аналогичные приемы, пожалуй можно было бы свести число аксиом не только к четырем (вместо пяти у Пеано), а, скажем, к трем или двум, но в этом «сведении» было бы мало пользы.

Итак мы видим, что основных понятий арифметики фактически не д в а, как утверждает автор, а больше. Посмотрим, как обстоит дело с аксиомами. На стр. 28 автор доказывает, что «каковы бы ни были натуральные числа a, b, c, если a предшествует b и b предшествует c, то a предшествует b». Доказательство получается так: «Прежде всего надо заметить, что при условии теоремы числа a и b д о л ж н ы б ы т ь

различны, иначе первое условие (т. е. *a* предшествует *b*) противоречило бы предложению V».

Предложение же V гласит «Никакое натуральное число *a* не предшествует самому себе». Приведем его доказательство полностью, чтобы затем читатель мог судить о правильности критики: «Ведь, если натуральное число *a* непосредственно предшествует какому-то другому натуральному числу *b*—аксиома (В), то никакое натуральное число, в частности и само число *a*, не может предшествовать числу *b* и в то же время следовать за *a*; а так как само *a* предшествует *b*,то стало быть оно не следует за *a*, т. е. *a* не предшествует *a*».

Вся эта система рассуждений нам не кажется убедительной. Прежде всего нам было предоставлено (см. выше) право понимать что угодно под словами «натуральное число *a* предшествует другому натуральному числу *b*»; относительно понятия «не предшествует» ничего не было сказано, в частности не указано, образует ли понятие «предшествует» и «не предшествует» полную дизъюнкцию. Очевидно, полнота дизъюнкции предполагается, и тем самым принимается закон исключенного третьего (по крайней мере для данного случая). Допустим, что это «подразумевается». Но кроме того речь шла о двух числах: числе *a* и другом числе *b*. О них мы следовательно знаем, что такое: «*a* предшествует *b*» и «*a* не предшествует *b*», и, положим, каждый раз в состоянии сказать, какое из двух состояний налицо. Но что значит «*a* предшествует *a*» или «*a* не предшествует *a*»,— об этом мы знать, не уполномочены поскольку мы имеем дело с одним числом, а не с двумя различными числами. Что различие чисел есть существенное свойство, а не просто словесное украшение или пояснение, видно хотя бы из того, что в условии аксиомы (А) (см. выше) слово «различные» существенно (если его отбросить, аксиома неверна). Итак, нужно еще иметь критерий различия или, выражаясь аксиоматически, должны быть введены основные понятия «различие» и «тождество», и потребуется еще одна аксиома, построенная по схеме аксиомы (А), например: «если числа *a* и *b* не тождественны, то они различны». Эта аксиома не логическая, как может показаться на первый взгляд. В самом деле, ведь числа согласно автору — это символы и больше ничего. Если так, то два числа — это два символа, и следовательно о логическом тождестве здесь не может быть речи.Необходимо по крайней мере постулировать существование символа, тождественного с данным.

Но повидимому автор не придерживается такого взгляда, что и приводит его к новым скачкам мысли. Так, на стр. 35 он дает определение равенства двух чисел: «если символы *a* и *b* обозначают одно и то же натуральное число, то говорят, что $a = b$». Но каким образом два разных символа могут означать одно и то же число, если число есть только символ и значит разные символы суть разные числа? Дело нисколько не становится лучше от того, что автор предпосылает (стр. 34 снизу) такое рассуждение: «Неотъемлемое право каждого человека — давать в процессе своего мышления какие угодно названия каким угодно вещам и вообще обозначать какие угодно вещи какими угодно символами. Существенно важно при этом

лишь то, чтобы другой человек, который следит за этим процессом, каждый раз определенно знал, какие символы к каким вещам относятся. Все остальное — вопрос удобства, взаимного соглашения и привычки. Так как символы тоже суть вещи, то и они в свою очередь могут получать какие угодно названия или вообще могут обозначаться какими-либо новыми символами. Поэтому современный (!) взгляд на числа как на символы нисколько не мешает, если этого потребуют удобства, в свою очередь обозначать их новыми более или менее сложными символами».

Пусть символы могут получать новые названия, но если хотят, чтобы мы признали эти названия числами, то я вправе считать их новыми числами, и без специальной аксиомы тождества я не обязан знать, что это то же самое число. «Все математики,— говорит далее автор,— молчаливо принимают следующее соглашение: если символ A обозначает какое-нибудь число, то символы (A), $[A]$ обозначают то же число».

Так не является ли это «молчаливое соглашение» аксиомой? И почему автор, обещавший «ничего не подразумевать», не включает ее в свою систему «четырех» аксиом, каждая из которых с точки зрения автора также представляет соглашение, ничем не отличающееся принципиально от «молчаливого» соглашения математиков?

Итак, система аксиом, как и система основных понятий, неполна,— это мы и хотели показать прежде всего. Но кроме того нельзя обойти молчанием также и то, что с точки зрения, на которой стоит автор, только что цитированная фраза (как и ряд других, разбор которых выходит за рамки нашей критики) вообще лишена смысла, так как символ A не «обозначает» какого-нибудь числа, а он сам и есть число; символ (A) тоже есть число, и эти символы — не одно и то же, а два разные и даже непохожие по начертанию знаки.

Употребление такого совершенно незаконного приема (апелляция к интуиции!) дает автору возможность «доказать» «непосредственно вытекающие из определения равенства» такие предложения:

Всякое число равно самому себе.

Если $a=b$, то и $b=a$.

Если $a=b$ и $b=c$, то и $a=c$.

И таким образом фактически молчаливо принимаются еще новые аксиомы арифметики.

Сказанного достаточно, чтобы показать, что книга А. В. Комарова не представляет собой шага вперед на пути аксиоматизации арифметики, как это может показаться на первый взгляд из перечня основных понятий и аксиом, количество которых «сведено» к скромным числам 2 и 4. Что касается методологической установки автора, то мы уже говорили о ней, разбирая общие положения «Введения». Нам предстоит теперь посмотреть, что получается при ее конкретном проведении.

Мы уже сказали, что формальные связи между понятиями арифметики не могут рассматриваться как свободные построения человече-

ской фантазии, они должны иметь исходной точкой и конечным пунктом реальные связи между процессами внешнего мира. Даже в том случае, когда мы создаем всякие «патологические» образы — скажем, неархимедову геометрию, — даже в этом случае конечной целью, объективно оправдывающей это изучение, является уяснение реальных связей: ибо может оказаться, что некоторая система объектов, может быть и отличная от той, из которой мы исходим в процессе абстракции, подчинена этим связям хотя бы частично, и таким образом мы приобретаем новый метод исследования. В «худшем» случае, если не удается подчинить этим связям какую-нибудь систему объектов исследования, наша «патологическая» теория дает возможность сделать явными некоторые свойства исходной системы абстракций, некоторые внутренние связи в ней, которые ускользают от внимания при непосредственном изучении. В этом случае математик поступает подобно физиологу, который замечает те или иные свойства живого организма, наблюдая болезненные их проявления, когда они обнаруживаются с той яркостью, которой не обладают в нормальном индивиде.

Итак, формальные связи арифметики должны так или иначе «отражать» свойства реального процесса: как мы видели, автор книги указывает на процесс счета как на процесс, анализ сущности которого он кладет в основу своих четырех аксиом. Мы уже указали на недостаточность этого анализа. Посмотрим теперь, насколько действительно «сущность» счета отражена в системе автора.

Процесс счета есть прежде всего процесс «прогрессивный», если так можно выразиться, т. е. в процессе счета числа появляются одно за другим; число 5 появляется только после числа 4, и без этого последнего в процессе счета не появляется. Это не мешает конечно тому, что на руке человека число пальцев равно пяти до всякого счета, и поэтому число пять я могу рассматривать и независимо от временной и логической последовательностей; тогда в основу понятия числа кладется понятие множества. Но тогда система аксиом не является продуктом анализа процесса счета. Это возражение не ограничивается указанием на терминологический дефект, который конечно мог бы быть легко исправлен. Суть этого возражения в том, что если в основу берется понятие множества (кстати, тоже неназванное в числе основных), то необходимо излагать аксиоматику теории множеств, иначе это основное понятие входит в теорию совершенно нелегально. По этому пути идут многие авторы; так например поступают Вебер и Вельштейн в «Энциклопедии элементарной математики». Мы далеки от мысли считать построение авторов «Энциклопедии» логически безупречным, но оно последовательно в том смысле, что операции над числами определены там на основании операций с множествами (что касается аксиоматики множеств, — ее нет и у Вебера-Вельштейна).

А. В. Комаров дает чисто символические определения операций над числами и таким образом как будто обходит трудную задачу аксиоматизации теории множеств. Но на самом деле он удваивает трудности задачи, ибо, как мы покажем сейчас, апеллирует «молчаливо»

к таким предложениям, относящимся к множествам, которые принадлежат к числу наиболее спорных.

На стр. 28 автор пишет: «Аксиома (С) применима к о н е ч н о и к множеству всех натуральных чисел, так что из этой аксиомы в частности следует, что существует такое натуральное число, которому не предшествует никакое другое натуральное число. Такое натуральное число называется е д и н и ц е й и обозначается знаком 1».

Нам кажется, что слово «конечно» здесь совершенно неуместно. Напротив, вопрос о применимости аксиомы (С) к множеству всех натуральных чисел совсем не прост, и в «лучшем» случае здесь требуется новая аксиома. В самом деле, если понимать под числом символ, то под множеством чисел нужно понимать множество символов. Можем ли мы мыслить множество в с е х таких символов-чисел без формально-логического противоречия? Это множество бесконечное, как видно из аксиомы (В). А мы знаем, что легко «указать» «бесконечные множества», формирующиеся этим словечком «все», которые формально противоречивы и к которым закон исключенного третьего во всяком случае не применим. Значит, оставаясь на почве формальной логики (а на ней автор стоит твердо!), мы должны обеспечить по отношению к бесконечным множествам по крайней мере полноту дизъюнкции — «элемент принадлежит множеству», «элемент не принадлежит множеству»,— чтобы не оказалось так (как это имеет место для «множества всех объектов мыслей» Дедекинда или для «множества всех несамосодержащих множеств» Рёсселя), что как допущение принадлежности, так и допущение непринадлежности некоторого элемента «данному» множеству ведет к противоречию. Следует заметить, что в доказательстве например принципа математической индукции А. В. Комаров молчаливо принимает полноту указанной дизъюнкции по отношению к м н о ж е с т в у всех чисел, и значит дело идет не о внешнем, чисто редакционном, дефекте, а об органическом пороке методологического характера.

Итак мы видим, что обоснование арифметики А. В. Комаровым вовсе не исходит ни из анализа «процесса счета», ни из анализа тех реальных соотношений, которые существуют между объектами этого процесса; оно исходит из оперирования понятием «все» по отношению к элементам бесконечного множества, в то время как операция счета есть прежде всего операция конечная. При определении операций над числами Вебер-Вельштейн по существу оперирует только к о н е ч н ы м и множествами. У Комарова же мы можем с чувством некоторого мистического удивления констатировать, что е д и н и ц а появляется только как продукт анализа множества всех натуральных чисел и что только после доказательства 15 теорем мы узнаем, что ряд 1, 2, 3, 4 и т. д. и с ч е р п ы в а е т все множество чисел. Так «поставлен на голову» анализ процесса счета! В сравнении с этим «анализом» нам кажется гораздо более «рациональным» не выдерживающий конечно строгой критики, но «стихийно-материалистический» подход Евклида, который говорит (кн. VII, опр. 1 и 2): Μονάς ἐστιν καθ' ἣν ἕκαστον των ὀντων εν λέγεται. Ἀριθμος δε το εκ μονάδων συνκείμενον πλῆθος. «Единица есть то, согласно чему каждое сущее называется «одним» (т. е. является единым— *М. В.*); «число же есть множество (πλῆθος), составленное из единиц».

До сих пор мы старались показать внутреннюю несостоятельность построений А. В. Комарова, оставаясь на той почве, на которой стоит автор, т. е. на почве формально логической. Теперь мы должны сказать, что, по нашему убеждению, попытки построения формального логического обоснования арифметики по существу фатально обречены на неудачу, ибо формальная логика есть процесс доказательств, имеющий ограниченный круг приложимости, и как раз там, где начинается проблема обоснования арифметики, она подходит к границам своей приложимости. Мы видим, в частности, что в число основных понятий арифметики входят основные понятия логики (тождество, различие, включение и т. д.). Нам кажется что задача выделения чисто арифметических аксиом и понятий и оперирование над ними при помощи аппарата формальной логики и есть задача невыполнимая уже по одному тому, что мы сомневаемся вместе с Пуанкаре в возможности такой логической системы, которая не содержала бы, хотя бы «молчаливо», понятия числа. Как выйти из этого заколдованного круга — вот вопрос, который волнует математическую мысль нашего времени и который должен быть разрешен в конце концов средствами логики диалектической.

Необходимость диалектического подхода к обоснованию арифметики становится особенно ясной тогда, когда мы обращаемся к проблеме обоснования арифметики в целом, а не ограничиваемся арифметикой целого натурального числа.

Уже в учении о целом числе возникает вопрос, как определить понятие числа таким образом, чтобы оно охватывало и отрицательные целые числа. Примером формально логического подхода к решению этого вопроса может служить изложение А. В. Комарова (гл. III, стр. 88 и следующие).

После краткого исторического введения автор говорит: «Пусть a, b, c обозначают какое-нибудь число системы N_0 (система N_0 есть система натуральных чисел, пополненная нулем), т. е. натуральные числа или нули. Если $a > b$ и $c > d$, то разности $a - b$ и $c - d$ не существуют в системе N_0. Однако, ничто не мешает в дополнение к этой системе, недостаточной в смысле вычитания, ввести новые символы, символы вида $a - b$, $c - d$ и т. д., совершенно аналогичные дробям. Надо условиться только в том, как понимать «равенство» этих символов и как производить над ними операции сложения, умножения и т. д. Некоторые авторы так и поступают. Предупредив читателя о том, что символ $a - b$ теперь уже обозначает не разность, а просто пару чисел a и b, рассматриваемых в определенном порядке, и что прежний знак «минус» является здесь просто связкой, они строят теорию этих пар, похожих по своему внешнему виду на разности, — теорию, аналогичную теории обыкновенных старых чисел. Все это теоретически вполне законно, ибо исключительно от нас зависит то или иное содержание, которое мы вкладываем в наши символы. Но так как начинающего... не может не смущать этот минус, слишком уже назойливо напоминающий о вычитании, и так как этот минус несколько прикрывает ту голую правду, по которой, по-моему, ни на минуту не надо

забывать и которая заключается в том, что речь идет просто о паре чисел a и b, то я предпочитаю «не писать никакого минуса и обозначать эту пару просто (a, b)».

Мы привели эту длинную выдержку, чтобы читатель мог из подлинных слов автора судить о его установке. В противовес ей мы утверждаем, что содержание, вкладываемое в символы вообще, в частности в символ $a - b$, совсем не зависит «исключительно от нас». Конечно «ничто не мешает» нам заниматься игрой в символы, но если мы строим научное обоснование арифметики, то мы должны вложить такое содержание в символ $a - b$, которое так или иначе отвечает некоторым реальным отношениям, а именно такое содержание, при котором «несуществующие» разности $a - b, c - d$ и т. д. существовали бы и, мало того, их существование отвечало бы какой-то потребности практики в широком смысле этого слова. С этой точки зрения хотя теоретически это не существенно, практически полезно удержать знак «минус», а не изгонять его. Потребностями практики определяется в конечном счете и тот выбор определений (равенства суммы, произведения и т. д.), которые устанавливаются в теории отрицательных чисел. Поэтому, строя теорию целого числа, недостаточно перечислить эти определения: нужно показать, почему даются такие определения, а не другие,—необходимо оправдать систему определений.

Отсутствие оправдания лишает теоретическую систему ее живенного нерва, остается мертвая ткань:

«Wer will was Lebendiges erkennen und beschreiben, sucht erst den Geist herauszutreiben»—эти слова Мефистофеля как нельзя лучше подходят к данному случаю.

Как бы то ни было, дав систему формальных определений понятий равенства, суммы, произведения, относящихся к «парам» «натуральных чисел», которые мы вслед за автором будем, скрепя сердце, называть целыми числами, А. В. Комаров на стр. 85—88 доказывает, что «основные законы арифметики, относящиеся к сумме и произведению чисел, сохраняются также и для пар первой ступени, если только слово «число» заменить словами «пара первой ступени». Доказательства эти столь же безупречны, сколько и не оригинальны. Читатель разрешит нам на них не останавливаться и перейти прямо к вопросу о связи между вновь построенными «парами первой ступени» и старыми «натуральными числами». Если мы хотим, чтобы понятие числа расширялось, мы должны достигнуть того, чтобы между старыми «натуральными» числами и новой системой не существовало логически непроходимой пропасти, чтобы старые числа оказались включенными в новую систему. В теории пар — это одинаково относится и к «парам второй ступени» (дроби) и к «парам третьей ступени» (комплексные числа) — этого не получается. Получается только то, что пары вида $(a, 0)$ $(b, 0)$ и т. д. ведут себя друг по отношению к другу так же, как натуральные числа a, b и т. д., но мы не имеем никакого права писать равенства $(a, 0) = a$, ибо в правой и левой частях равенства стоят объекты совершенно различной природы. Если же, как предлагает А. В. Комаров на стр. 89, смотреть на символ

a как на сокращенное обозначение пары, то мы готовы, чтобы не усложнять вопроса, допустить вместе с автором, что равенство $(a, 0)=a$ «можно написать согласно закону тождества», но, становясь вместе с тем на формальную точку зрения символизма, отказываемся признавать правомерным обозначение одним и тем же символом a пары и натурального числа. Если же a мы отныне не считаем символом натурального числа, тогда и пара $(a, 0)$ не существует, ибо она должна быть парой натуральных чисел.

Сам А. В. Комаров очевидно чувствует, что здесь что-то не в порядке, потому что уже после того, как он убедил читателя в том, что равенство $(a, 0) = a$ написать можно, и подкрепил это ссылкой на закон тождества, он все же добавляет: «Строго говоря, пара $(a, 0)$ и число a, представляющее один из элементов этой пары, вещи разные; но так как и то и другое всего лишь условные знаки и притом вполне заменяющие друг друга при обозначении вещей или отношений между вещами реального мира, то эти символы совершенно сливаются для нас в своем значении».

Но то обстоятельство, что принципиально разные символы «сливаются для нас» в одно целое, должно быть признано не достоинством системы, а ее недостатком, если стать на точку зрения последовательного символизма. Между тем с точки зрения пищущего эти строки речь должна итти не о формальном слиянии, а о внутреннем единстве системы, при котором натуральные числа находились бы в новой системе, составляя ее часть. С этой точки зрения нам представляется методологически более правильным то построение теории целых чисел, которое мы находим в «Энциклопедии элементарной математики» Вебера-Вельштейна, где отрицательные числа вводятся как новый ряд натуральных чисел, известным образом связанный с первоначальным рядом, а затем устанавливаются соглашения насчет соотношений «больше, меньше, равно, сумма» и т. д. между целыми числами, ряд которых определяется как совокупность рядов положительных и отрицательных чисел (стр. 40—41, т. I, кн. 1, Гиз, 1927).

При таком построении прежде всего натуральные числа не «сливаются» ни с какими принципально отличными логическими объектами; затем это определение не произвольно, как определение «пары» оно связано с конкретным истолкованием отрицательного числа. Авторы «Энциклопедии» прямо говорят: «Представим себе еще один ряд натуральных чисел и воспользуемся этим рядом для счета объектов, находящихся в известном противоположении к тем объектам, которые мы считали при помощи первого ряда, как например объекты, расположенные справа и слева, градусы, лежащие выше и ниже точки замерзания, имущество и долг...». Наконец, устанавливая правила действий над целыми числами, авторы оправдывают эти правила желанием сохранить закон перманентности.

Справедливость требует отметить, что теория дробей в «Энциклопедии» излагается, как и у А. В. Комарова, как теория пар, но и здесь методологически «Энциклопедия» стоит ближе к реальности.

С точки зрения А. В. Комарова дробь есть пара п а р; с точки зрения Вебера-Вельштейна — п а р а ч и с е л. С точки зрения Комарова (стр. 104) теория пар второй ступени «теоретически может вполне з а м е н и т ь систему целых чисел, самостоятельное существование которой становится н е н у ж н ы м»; с точки зрения Вебера-Вельштейна (стр. 64) под дробью со знаменателем 1 мы «условливаемся считать целое число, выраженное ее числителем, т. е. положим $a=a$». У Комарова же с равенством $(a, 1) = a$ дело обстоит так же, как и с равенством $(a, 0) = a$ для пар первой ступени, сопровождаемым оговорками, вполне аналогичными вышецитированным.

Итак, вместо картины р а з в и т и я понятия числа мы имеем ряд формальных построений, из которых каждое следующее не включает в себя предыдущее, а отбрасывает «как ненужное», и, как показывает сравнение рецензируемой книги с «Энциклопедией» Вебера-Вельштейна, в этом чрезвычайно важном вопросе А. В. Комаров не сделал шага вперед.

Того, что сказано выше, пожалуй достаточно для характеристики методологической стороны изложения. Можно лишь добавить, что чем дальше автор отходит от о с н о в н ы х проблем обоснования, чем больше погружается в гущу чисто математических переделок, тем изложение становится естественно более безупречным с формальной стороны, и — нужно отдать автору справедливость — на книге лежит печать добросовестной, тщательной обработки, так что мы не сомневаемся в искренности автора, когда читаем в предисловии, что он «вдумывался в каждое слово, стараясь передать свою мысль как можно отчетливее». Действительно там, где речь идет о вещах, далеких от философско-математических вопросов, изложение становится в высшей мере отчетливым и ясным, хотя при всем том книга в целом с к у ч н а. Отчасти это объясняется тем, что автор хотел все доделать до конца, отчасти тем, что стремясь к достижению формальной строгости, он не смог оживить изложения экскурсами в более общие методологические проблемы.

Единственное, что несколько оживляет изложение,—это исторические введения в главы. Здесь дано довольно много материала, но этот материал недостаточно внутренне связан с изложением теории. Имеются и отдельные неточности фактического характера. Так, на стр. 335 мы узнаем, что Лейбниц и Ньютон «введением понятия производной положили основание современному анализу бесконечномалых». Конечно ни Лейбниц, ни Ньютон не положили основания анализу, который имеет гораздо более давнее происхождение. Заслуга Лейбница и Ньютона в истории анализа состоит в том, что они систематически развили вопрос о связи между дифференцированием и интегрированием, как взаимно «обратных» операциях. Вряд ли можно также сказать, что ими введено п о н я т и е производной. Если даже смотреть на флюксии Ньютона как на прототип современной «производной», то уже во всяком случае Лейбницу была чужда современная концепция предела (см. например вышеуказанную работу Д. Д. Мордухай-Болтовского или небольшую брошюру Вилейтнера: «Как зарождалась современная математика», Гиз, 1927).

На стр. 194 мы читаем, что английский математик Гаррио еще до Жирара дошел до теоремы о том, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней, среди которых могут быть и мнимые! При этом имеется ссылка на «Artis analyticae praxis», правда без более подробных указаний. Мы не имели возможности проверить по подлиннику утверждения автора, но известно, что Гаррио не признавал не только мнимых, но даже отрицательных чисел. По крайней мере у Кантора (Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, II, 792) мы находим изложение «доказательства» Гаррио о «невозможности» уравнений с отрицательными корнями и ссылку на соответствующее место из Гаррио (Artis analyticae praxis, sectio 6, Probl. 1, Lemma, p. 89—90).

Отсутствие внутренней связи исторического материала с изложением теории можно иллюстрировать на таком примере. На стр. 239—241 автор рассказывает о том, что Эйлеру пришла в голову «смелая» мысль применить разложение в степенной ряд e^x к тому случаю, когда вместо вещественного показателя x берется чисто мнимый показатель xi.

«Эту мысль,— продолжает Комаров,— следует признать столько же гениальной по своим последствиям для анализа, сколько и глубоко ошибочной в своих логических основаниях... Современная математика, признавая громадные удобства, связанные с этой формулой и не замедлившие обнаружиться непосредственно после ее получения, но вкорне осуждая те мнимо логические рассуждения, которые к ней привели, принимает эту формулу $e^{xi}=\cos x+i\sin x$) просто за определение e^{xi}».

На стр. 241 автор говорит, что формулы Эйлера впервые связали «столь разнородные на первый взгляд вещи, как e^x, с одной стороны, и $\sin x$ и $\cos x$—с другой. Для прогресса математического анализа и его приложений не имело значения то обстоятельство, что эти формулы были получены совершенно неправильно. Хотя сам Эйлер и не понимал должным образом (!) настоящего смысла этих соотношений, но тем более надо удивляться гениальной интуиции, которая привела этот ум через ряд величайших, с нашей современной точки зрения, заблуждений к ряду величайших бессмертных открытий».

Конечно верно то, что с точки зрения логического обоснования формула Эйлера получена «незаконно», как незаконно, кстати сказать, было получено разложение e^x в ряд и для вещественного показателя. Но если формула Эйлера «просто» принимается за определение e^{xi}, то где же здесь «бессмертное открытие»? Где здесь установление связи между «различными» вещами? Ведь, если сказать: «условимся под e^{xi} понимать $\cos x+i\sin x$», то разве этим устанавливается связь между показательной и тригонометрическими функциями?

Вот вопросы, которые возникают у всякого читателя, но на них он не найдет у Комарова ответа. А между тем этот исторический пример прекрасно иллюстрирует процесс возникновения математических определений и доказательств. Нужно только показать, чем руководился Эйлер при установлении своих формул и, вместо неопределенных комплиментов насчет его гениальной интуиции показать роль эйлеровских формул для математического аппарата, т. е. показать, почему оказалось необходимым, заглаживая логические

грехи Эйлера, вводить именно такое, а не какое-нибудь другое определение символа e^{xi}, почему вместо того, чтобы отбросить логически необоснованные утверждения как несоответствующие высокому званию математики, — эта «царица наук» старается усыновить их путем мнимо-произвольных актов «свободной мысли».

Без такого разъяснения исторический пример обращается в исторический анекдот и конечно не стоит ни в какой внутренней связи с основным теоретическим содержанием.

Остается сделать еще несколько замечаний насчет выбора материала. Здесь удивляет прежде всего странная «неравномерность». Как мы видели, в первой части книги автор трактует труднейшую проблему обоснования арифметики, предполагая очевидно достаточно подготовленного читателя. Поэтому очень странное впечатление производит например глава VII второй части, где на 35 страницах разъясняются понятие функции, построение графиков элементарнейших функций, понятие уравнения и т. д.; в главе IX (линейные функции и уравнения) содержится также масса элементарного материала, содержащегося отчасти в школьных учебниках, а что сверх того — в любом учебнике по теории определителей (самые начальные сведения об определителях второго порядка и исследовании с их помощью системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными). Большая часть главы X (квадратичная функция и квадратные уравнения) того же характера, остальные составляют элементы высшей алгебры, включая решение уравнений третьей и четвертой степени. Что же касается так называемой основной теоремы высшей алгебры, то для нее у автора нехватило места, и он ограничивается крайне неясным изложением хода мыслей Гаусса (первое доказательство, 1799), отсылая читателя к Веберу-Вельштейну.

Нам кажется, что в книге, излагающей т е о р е т и ч е с к и е о с н о в ы алгебры, можно обойтись на худой конец и без график линейных и квадратных функций, но дать о с н о в н у ю теорему алгебры абсолютно необходимо.

В предисловии мы находим перечисление ряда пробелов, «с мучительной остротой вставших перед моим сознанием и вызванных исключительно недостатком места». С удивлением мы констатируем, что в этом перечне пробелов упоминание об основной теореме алгебры отсутствует, зато фигурируют «исследование системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными (!), показательная и логарифмическая функция, целая функция третьей степени».

Автор не считает повидимому пробелом и то, что в книге ничего не говорится о методах приближенного решения алгебраических уравнений. Нам же кажется, что этот вопрос для преподавателя школы имеет очень большое значение, и для него в книге должно было найтись место. Может быть за счет исключения элементарного материала оказалось бы возможным изложить даже элементы теории групп и теорию Галуа, не увеличивая объема книги.

В заключение добавим, что огромное количество элементарного материала (во второй части книги) и обилие принципиально несущественных деталей не могли не отразиться и на объеме книги (стр. 448).

который можно было уменьшить по крайней мере на четверть (если не на треть) без ущерба для ее содержания. Соответственно уменьшились бы как расход бумаги, так и цена книги, которая мало доступна тому контингенту лиц, для которых книга предназначена.

М. Выгодский

В. Гренвиль и Н. Лузин. Элементы дифференциального и интегрального исчисления, часть 1, 8-е переработанное и дополненное издание, Гиз, 1930.

Восьмое издание курса Гренвиля подверглось в руках академика Н. Н. Лузина настолько коренной переработке, что эта книга, пользующаяся у нас широким распространением и известностью, в настоящем своем виде приобретает совершенно иной облик. В своих прежних изданиях курс Гренвиля сосредоточивал внимание учащегося преимущественно на технике вычислений, и в этом отношении ему нельзя отказать в целом ряде методических достоинств. Принципиальные же вопросы анализа укладывались в конспективно изложенные небольшие параграфы, достаточно строгие по своей форме и... достаточно сухо изложенные. Правда, для читателя, имеющего силу преодолеть эту сухость, чтение книги не могло представить больших трудностей, но вместе с тем книга не давала ему повода вдуматься глубже в принципы анализа. Автор как будто исходил из молчаливой предпосылки, что читатель — студент втуза — должен поменьше философствовать и побольше приобрести технических навыков. Отсюда и стиль книги, где все процессы расчленяются на «шаги»: «первый шаг», «второй шаг» и т. д.

Правда, «шаги» остались и в новом переработанном издании, но они уже не характерны для стиля. Напротив, теперь внимание читателя приковывается с первых же страниц к принципиальным вопросам, и этим последним не грозит опасность потонуть в море технических переделок.

Автор переработки поставил себе задачей осветить вопросы, казалось бы, очень простые, но таящие под оболочкой видимой простоты целый ряд тонких проблем, и к этой задаче он относится с большим вниманием. В этой книге читатель найдет такие замечания, которых не встретишь в многочисленных толстых и тонких работах на ту же тему. Возьмем для примера § 29 главы III, озаглавленной «Постоянная величина как переменная». Автору этих строк никогда не приходилось встречать в учебниках анализа ни такой постановки вопроса, ни такой ясности и яркости изложения, какую мы здесь находим. На протяжении немногих строк автор показывает, что не только с формальной стороны выгодно рассматривать постоянную величину как переменную, но и в конкретных случаях постоянная величина играет роль переменной (расстояние движущейся точки от неподвижной есть переменная величина, в частном же случае движения по окружности — постоянная).

Следует отметить, что абстрактные рассуждения часто сопровождаются образными сравнениями, придающими изложению прямо художественную форму. Например в § 8 главы II мы находим такое описание числовой прямой с ее рациональными и иррациональными точками: «Если представить себе рациональные точки черными и непрозрачными, а все другие точки прозрачными, то мы, став против света и держа нашу прямую перед глазами, увидели бы пробивающиеся всюду бесконечно тонкие лучи света, прошедшие через иррациональные точки».

Мы должны во избежание недоразумений отметить, что подобная апелляция к физическим образам во многих случаях, как и в данном, носит лишь характер художественного приема, который при всех его педагогических достоинствах не претендует на то, чтобы вскрыть взаимоотношение математических абстракций и действительных явлений природы. Об этом мы еще скажем ниже.

Еще об одной тенденции, чрезвычайно прельщающей читателя, необходимо здесь упомянуть: академик Н. Н. Лузин, один из наиболее блестящих представителей современной теории функций вещественного переменного, стремясь поднять читателя на высоту современной постановки проблем анализа, вместе с тем совершенно чужд формального педантизма. Он хочет дать читателю возможность «почувствовать», в чем сущность проблемы, и вместе с тем не возлагать на него непосильного труда следить за тонкими изгибами математической мысли, ограничиваясь указанием на результат, иногда «оправдывая» результат наглядными уподоблениями (см. например § 210 главы XIX, трактующий о пределах последовательностей).

В целом книгу нужно признать одной из лучших книг в с в о е м р о д е; знакомство с ней принесет большую пользу и подготовленному читателю.

Этим мы отнюдь не хотим сказать, что книга лишена дефектов. Дефекты есть, и на наш взгляд, довольно чувствительные. Ниже мы о них скажем.

Но сейчас, отвлекаясь от них, мы хотим со всей силой подчеркнуть, что на взгляд пищущего эти сроки, по с в о е м у т и п у эта книга при всех ее достоинствах дает совсем не то, что нужно для студента высшей технической школы, которого имел ввиду Н. Н. Лузин (см. предисловие к книге). Конечно не в том дело, что автор подчеркивает и развивает т е о р е т и ч е с к и е моменты курса; за эту тенденцию мы можем быть лишь признательны. Но дело в том, к а к осуществляется эта тенденция. И не об отдельных недостатках изложения мы хотим говорить, а о п р и н ц и п а х, положенных в основу изложения теории.

Мы глубоко убеждены в том, что учебное руководство, вводящее в новую дисциплину с ее новыми методами и проблемами, должно прежде всего удовлетворять требованию, чтобы учащемуся с самого начала было ясно, о т к у д а в о з н и к а е т новая проблема, почему создаются новые методы и как они развиваются. Иначе говоря, процесс вырастания абстракций на почве конкретной действительности должен быть осознан. Это осознание необходимо как для того, чтобы

студент научился плодотворно применять математический метод на практике, так и для того, чтобы он смог получить живой интерес к изучению теории и ключ к ее глубокому пониманию.

Академик Н. Н. Лузин повидимому стоит на позиции, принципиально противоречащей этой точке зрения. Можно ли иначе объяснить тот факт, что читателю предлагается проработать 200 страниц «введения в анализ», прежде чем он подойдет к основному понятию всей книги — производной функции. Более того, это понятие вводится на стр. 229—230 чисто арифметически, и лишь глухо говорится: «Оказалось по мере развития естествознания, что разрешение весьма многочисленных и крайне разнообразных задач сводится к вычислению пределов отношений вида:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Вот и все, что узнает читатель о физическом смысле производной. Лишь на стр. 361 мы находим упоминание о «приложении производных в механике».

Никак нельзя предположить, что здесь мы имеем дело с недостатком педагогического чутья.

В основе такой трактовки вопроса, столь обычной для многих авторов, лежат несомненно определенные идеологические мотивы. Здесь перед нами явно выраженная идеалистическая концепция: понятие рассматривается как нечто первичное; его практическая значимость есть лишь «приложение» логического к конкретному; содержание понятия формируется не практикой, а заложено где-то в смутных глубинах сознания, и задача науки — извлечь его из этих глубин на ясную поверхность рассудочного мышления. В какой мере тот или иной автор исходит из осознанной и последовательно проводимой концепции, в какой мере следуют традиции—это вопрос, на который не всегда легко ответить. Но в данном случае, думается нам, мы можем констатировать отчетливо осознанную принципиальную точку зрения, которая, как бы ее ни квалифицировать, во всяком случае чужда материализму. В подтверждение этого мы можем сослаться на краткое примечание на стр. 35. В тексте мы читаем: «Разделим единицу масштаба на столь большое число равных частиц, чтобы эти частицы оказались столь мелкими, что сделались уже меньше данного отрезка AB». Примечание гласит: «Самая возможность разделить отрезок на столь мелкие частицы является постулатом, содержащимся в смутном представлении обычной протяженности».

То, что автор подчеркивает в элементарном курсе постулативный характер этого или иного положения—это прекрасно. Но то, что содержание постулата оправдывается апелляцией к представлению «обычной» (?) протяженности—это, на наш взгляд, положение неприемлемое.

Такого же рода апелляцию к «созданию» мы находим в других местах книги. На стр. 41 мы читаем: «Когда мы указанный бесконечный процесс нанесения на прямую $X'X$ метров, дециметров, сантиметров и т а к д а л е е (подчеркнуто в тексте) вообразим уже закончившимся, тогда в с я десятичная сеть будет нанесена на прямую $X'X$».

И примечание: «Читатель без сомнения почувствует неловкость (!) воображать этот процесс уже завершившимся. По этому поводу следует заметить, что на практике этот процесс разумеется сильно ограничен и что фактически мы можем проделать только относительно небольшое число дроблений отрезка на равные части. Но это практическое затруднение играет лишь побочную роль, и мы вполне можем мыслить указанный процесс не только бесконечно продолжающимся, но даже уже завершившимся».

Неужели это аргумент за правильность определенной концепции? Неужели можно приглашать студента, отбросив чувство «неловкости», поверить, что возможность мыслить процесс завершившимся есть гарантия правильности такого образа мышления. Да и можно ли утверждать категорически возможность мыслить законченным бесконечный процесс, в то время когда целая школа математиков утверждает противное? Здесь нельзя не отметить, что четырьмя страницами дальше утверждается, что «никто никогда не мог и не может сложить в буквальном смысле слова бесконечно много слагаемых и, если говорят о сумме членов прогрессии $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$, то читатель должен все время иметь в виду, что это сумма не настоящая (!), а лишь предел...» и т. д. Почему и в этом случае нельзя «мыслить» процесс завершенным с таким же успехом, как в предыдущем случае,— это не выяснено: автору не может быть неизвестно и то, что классики математической мысли (например Бернулли, Тейлор, Эйлер) считали возможным мыслить процесс суммирования бесконечных рядов (и даже не только сходящихся) законченным, так что категорическое утверждение: «никто никогда» тоже нуждалось бы по крайней мере в оговорках. Что касается читателя, то эти следующие друг за другом примечания могут поселить в его уме великое смятение.

И все это потому, что апелляция к мышлению как критерию истины вряд ли удовлетворит советского студента, воспитывающегося в атмосфере, «пропитанной» материалистическими бациллами.

Вышеобрисованную тенденцию автора мы назвали бы априористической. С ней тесно связана другая, которую нам будет позволено квалифицировать как антиисторическую.

Против утверждения, что учебник анализа должен быть «теснейшим образом связан с текущими научными взглядами на основы анализа и имеет срок обращения, не превышающий длительности жизни этих взглядов» (стр. IX, предисловие к 1 изданию), — против этого утверждения мы принципиально возразить ничего не можем. Но если в этом утверждении подразумевается, что предшествующее развитие научных взглядов должно быть сдано в архив и без остатка вытеснено текущими взглядами, то против такой точки зрения мы должны возражать тем с большей настойчивостью, что она присуща огромному большинству авторов. В противоположность ей мы утверждаем, что кратчайший путь к усвоению современных научных взглядов, дающий вместе с тем и гарантию против догматического подчинения этим взглядам, есть путь исторический или, если хотите, генетический.

Мы не хотим сказать, что учебник анализа должен воспроизводить извилистый исторический путь развития науки. Нет, но он должен в систематическом изложении провести учащегося через те посредствующие этапы, которые ведут от наивных взглядов к современным «строгим». Лишь тогда самая «строгость» будет по достоинству оценена читателем.

Может быть ни в одном пункте не выступает так ярко необходимость исторического метода изложения, как при введении понятия дифференциала. Каждому преподававшему анализ, на какой бы точке зрения он ни стоял, известно, что учащемуся всегда чрезвычайно трудно помириться с формальным определением дифференциала, которое дается в учебниках анализа. Происходит это потому, что игнорируется генезис дифференциала. Можно сказать, что дифференциальное исчисление не могло бы появиться на свет, если бы властная рука Гренвиля могла помешать Лейбницу или Бернулли оперировать дифференциалами как количествами, обладающими способностью обращаться в нуль и в то же время иметь конечные отношения и суммы. Конечно современная наука ушла далеко вперед от этих «наивных» взглядов, но, лишь исходя из последних, учащийся поймет цель и смысл тонких ухищрений анализа с целью обойти эту сакраментальную бесконечность ухищрений, то и дело приводящих к обнаружению того, что формальные противоречия, вытравленные из той области, где они били в глаза, воспроизводятся в областях более высоких, где они менее заметны, но более опасны.

Мы полагаем, что как бы строго ни строился начальный курс анализа, понятие бесконечно-малой величины (и дифференциала в частности) должно быть дано в его развитии. Как бы формально ни определялся дифференциал, необходимо оправдать это формальное определение.

В первых изданиях учебника Гренвиля в главе «Дифференциалы» мы находим следующее примечание Н. Н. Лузина: «Читатель должен отдать себе ясный отчет в том, что приращение Δx, входящее как множитель в дифференциал $f(x)\,\Delta x$, не имеет ничего общего с тем приращением Δx независимого переменного, которое употребляется при вычислении производной $f'(x)$». Дальше идет пробная мотивировка совершенно формального характера. Нам кажется, что подчеркивание формальной независимости дифференциала от стремящегося к нулю приращения, употребляемого при вычислении $f'(x)$, — подчеркивание, не сопровождающееся разъяснением внутренней связи между этими понятиями, — не может быть признано правильным ни с методологической, ни с педагогической точек зрения.

Правда, это примечание не фигурирует в рецензируемом издании. Трудно сказать, по каким соображениям оно изъято; но по существу в § 160 главы XI нового издания мы имеем дело с той же тенденцией сугубо формального определения. Нужно отдать справедливость, что тенденция эта проведена и здесь с большой последовательностью, но... тем более ярко выявляется ее неприемлемость: «Условимся, — читаем мы, — называть диференциалом независимого переменного x новое (второе) независимое переменное, соответствующее первому

независимому переменному x. То обстоятельство, что это второе независимое переменное соответствует первому независимому переменному, отметится нами тем, что для его обозначения мы поместим букву d впереди независимого переменного x, которому оно соответствует».

Можно по-разному отнестись к такому способу определения дифференциала. Иные скажут, что оно неудачно. Нам, напротив, кажется, что оно вполне отвечает тенденции книги. Подчеркивание того, что dx есть независимая переменная величина, есть лишь откровенное выставление на вид того, что обычно смазывается в определении дифференциала. Мы в корне не согласны с тем, чтобы определение дифференциала давать чисто формально, игнорируя историческое прошлое дифференциала как своеобразной, актуально бесконечно-малой величины; но если это уже делать, то конечно так, как это делает Н. Н. Лузин. В § 160 он вполне последовательно проводит тенденцию, красной нитью проходящую через всю книгу.

Итак, мы против принципиальной установки, из которой исходит учебник Гренвиля-Лузина, но мы не можем не признать, что с точки зрения э т о й установки книга написана ярко, красочно и обнаруживает тонкое педагогическое чутье и художественный вкус автора.

Нам хотелось бы указать еще на некоторые дефекты изложения.

На стр. 54—56 изложены догматически операции над комплексными числами.

Автор заявляет, что теорию комплексных чисел не дозволяют изложить рамки книги, но, чтобы дать о ней читателю представление, Н. Н. Лузин снабжает § 16 следующим примечанием: «Согласно ей (современной теории комплексных чисел.—*М. В.*) в выражении $a+bi$ буква i обозначает д е й с т в и т е л ь н о е п е р е м е н н о е. Но, производя арифметические выкладки над этими выражениями по обычным правилам алгебры, интересуются все время лишь о с т а т к а м и от д е л е н и я в с я к о г о р е з у л ь т а т а (промежуточных и окончательного) н а д в у ч л е н i^2+1. Поэтому результат всякой арифметической выкладки над выражениями $a+bi$ будет опять выражением этого же вида (так как остаток от деления на квадратный двучлен i^2+1 должен быть степени ниже, т. е. вида $a+bi$. В частности остаток от деления i на i^2+1 есть -1. Поэтому, интересуясь все время лишь указанными остатками, мы должны считать i^2 р а в н о с и л ь н ы м -1, что символически выражают в виде условного равенства».

Мы считаем, что это примечание способно лишь повергнуть в душевное смятение впечатлительного читателя. Выяснить ему оно ничего не в состоянии.

В книге немало и других мест, где о тонких вопросах анализа упоминается мимоходом, так что читателю не может быть ясна самая постановка проблемы. Например читатель на стр. 123 ставится в известность о том, что теорема Кантора (о том, что всякая непрерывная функция равномерно непрерывна) есть предложение «отнюдь не очевидное». В более глубокие рассмотрения снова не дозволяют входить рамки книги.

Но дело в том, что при том определении равномерной непрерывности функции, которое дано в тексте, никак не может стать очевидной неочевидность теоремы Кантора. Именно, на стр. 119 мы читаем: «Функция $y = f(x)$, определенная на отрезке, включая его концы, называется непрерывной на этом отрезке, если ее приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ бесконечно-мало независимо от положения x на отрезке, когда приращение Δx аргумента бесконечно-мало» [1].

Слова «независимо от положения на отрезке» не сопровождаются никаким разъяснением. Нетрудно видеть, что на базе этого неотчетливого определения читателю почти невозможно уяснить различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью, и потому, когда Н. Н. Лузин говорит: «это обратное предложение (теорема Кантора) отнюдь не очевидно, и в его истинности обнаруживается вся тонкость и глубина общего учения о функциях», то ни тонкости, ни глубины читатель почувствовать не сможет. Почувствует же он просто растерянность.

В предисловии Н. Н. Лузин чрезвычайно неблагосклонно отзывается о тех учебниках, «в которых говорят о непрерывных функциях таким языком, как если бы они всегда имели производную», считая, что «замалчивание непрерывной кривой без касательной есть сокрытие, сознательное или по неведению (!), математического факта, в настоящее время вполне наглядного».

Если мы поинтересуемся, как освещается этот вполне наглядный факт в рецензируемой книге, то мы найдем на стр. 236 лишь упоминание о нем со ссылкой на стр. 156 «Диференциального исчисления» Бибербаха. Но так как читатель книги на той стадии математического развития, на какой он пребывает в момент чтения, не сможет обратиться к стр. 156 Бибербаха, то столь ненаглядное прокламирование наглядного факта повергнет его в новое смущение. На наш взгляд, лучше уже скрыть факт, чем дать о нем столь смутное представление.

Вообще, стоя на исторической точке зрения, мы не можем считать преступным замалчивание факта, которому не поверил бы Ньютон или Эйлер,—по крайней мере, если бы об этом факте им было бы лишь упомянуто. Но, как было показано, антиисторизм характерен для книги Лузина.

---

[1] Очевидно, что терминология несколько отлична от прежней: термин «непрерывность на отрезке» замещает термин «равномерная непрерывность». Против этого конечно нечего возразить.